

DER VERBAND DER TORSIONSTHEORIEN
FÜR EINE ADDITIVE
KATEGORIE $\mathcal{C}$

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der Abteilung für Mathematik
der Ruhr - Universität Bochum

vorgelegt von

Gerhard Herden

1979



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546403_0056

DER VERBAND DER TORSIONSTHEORIEN
FÜR EINE ADDITIVE
KATEGORIE C

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der Abteilung für Mathematik
der Ruhr - Universität Bochum

vorgelegt von

Gerhard Herden



Referent: Prof. Dr. Elliger

Korreferenten: Prof. Dr. Ewald

Prof. Dr. Wischnewsky

INHALT:

Einleitung	S. 4
Kapitel I: <u>V-Theorien</u>	
§ 1: Die Axiomatisierung des Begriffes "Torsions- theorie für eine abelsche Kategorie C"	S.12
§ 2: Einfach erzeugte und einfach coerzeugte V-Klassen bzw. V-freie Klassen für (O,P)	S.17
Kapitel II: <u>Torsionsklassen für additive Kategorien und ein Isomorphiekriterium für Verbände von V-Klassen</u>	
§ 3: Grundlegende Lemmata	S.30
§ 4: Die Struktur des Verbandes der Torsions- klassen für eine additive Kategorie C	S.36
§ 5: Ein Isomorphiekriterium für Verbände von V-Klassen	S.44
Kapitel III: <u>Der Verband der Torsionsklassen für eine Modulkategorie</u>	S.58
§ 6: Die Atome von $(\mathfrak{J}, \mathfrak{C})$	S.59
§ 7: Die Coatome von $(\mathfrak{J}, \mathfrak{C})$	S.66
§ 8: Die Charakterisierung von Ringen durch den Verband $(\mathfrak{J}, \mathfrak{C})$ der Torsionsklassen für Mod-R	S.75
Literatur	S.85

EINLEITUNG:

I. Hintergrund:

Diese Arbeit beschäftigt sich vor allem mit Torsionstheorien für additive Kategorien.

Torsionstheorien für abelsche Kategorien wurden von Dickson (7) in seiner Dissertation eingeführt. Sie verallgemeinern den klassischen Torsionsbegriff für kommutative Integritätsringe R .

Spezielle Torsionstheorien - hereditäre Torsionstheorien - erwiesen sich als äußerst nützlich innerhalb der Entwicklung einer allgemeinen Lokalisationstheorie für abelsche Kategorien oder spezieller für nicht-kommutative Ringe. In diesem Zusammenhang sei besonders auf die grundlegenden Arbeiten von Gabriel (11), Goldie ((16), (17), (18)), Goldman (19), Lambek ((28), (29), (30)), Maranda (33), Morita ((37), (38)) und Walker und Walker ((55), (56)) sowie auf die älteren Arbeiten von Johnson (23) und Utumi (53) hingewiesen. Vor allem diesen Mathematikern ist es meiner Meinung nach zu verdanken, daß die allgemeine Lokalisationstheorie für abelsche Kategorien einen bedeutenden Platz innerhalb der Algebra einnimmt. Viele neuere Lehrbücher tragen dieser Bedeutung Rechnung. Erwähnt seien hier lediglich die Lehrbücher von Faith (10), Popescu (39) und Stenström (49).

II. Gegenstand dieser Arbeit:

Die allgemeinen Torsionstheorien für abelsche Kategorien bilden in natürlicher Weise einen vollständigen Verband

(vgl. etwa Lambek (29), §0 oder Stenström (49), chapter vi, §1). Die Untersuchung der Struktur dieses Verbandes bildet den Hauptinhalt dieser Arbeit.

Der Verband der hereditären Torsionstheorien für eine Modulkategorie über einem assoziativen Ring R mit Einselement wurde in jüngster Zeit von Golan ((14), (15)), Louden (31) und Raynaud (44) untersucht.

Daß ich mich in dieser Arbeit mit dem Verband aller Torsionstheorien für eine abelsche Kategorie C und nicht nur mit dem Verband der hereditären Torsionstheorien für C beschäftige, bedarf einer kurzen Erklärung:

Sei C die Kategorie der R -Rechtsmoduln über einem assoziativen Ring R mit Einselement. Beschränkt man sich auf das Studium der hereditären Torsionstheorien für C , gelingt es i.a. nicht, die Klassen der Radikalmoduln beliebiger Radikale für C (Definition siehe (49), chapter vi, §1) mitzuerfassen. Radikale erweisen sich jedoch für das Studium beliebiger Ringe als besonders wichtig. Erwähnt seien hier vor allem zwei Radikale, die i.a. nicht zu hereditären Torsionstheorien für C führen, nämlich das Jacobson-Radikal, das jedem R -Rechtsmodul den Durchschnitt seiner maximalen Untermoduln zuordnet, und das Radikal K_R , definiert durch $K_R(M_R) = \bigcap_{f \in \text{Hom}_R(M_R, R)} \text{Ker } f$.

Die Bedeutung des Jacobson-Radikals braucht nicht besonders erwähnt zu werden.

Das Radikal K_R gewinnt seine Bedeutung innerhalb der Theorie der torsionslosen Moduln (vgl. Kato (25)). Jans (22) untersucht es im Zusammenhang mit QF - 3'-Ringen.

Ersetzt man R bei K_R durch einen beliebigen R -Rechtsmodul

U_R , gelangt man zum Konzept des U-torsionslosen Moduls, wie er bei Kato ((25), (26), (27)) zu finden ist. Der Begriff des U-torsionslosen Moduls läßt sich zum Begriff der U-dominanten Dimension erweitern. Erwähnt seien hierzu Arbeiten von Kato ((26), (27)), Morita ((37), (38)), Storrer (50) und Tachikawa (51).

Innerhalb einer allgemeinen Lokalisationstheorie für abelsche Kategorien C ist es notwendig, hereditäre Torsionstheorien für C zu studieren. Es erscheint mir jedoch unzumutbar, sich z.B. innerhalb einer allgemeinen Ringtheorie, die u.a. die Wechselbeziehungen zwischen einer Modulkategorie und dem ihr zugrundeliegenden Ring R untersucht, beim Studium der Torsionstheorien über R auf die hereditären Torsionstheorien zu beschränken.

Mein Dank gilt an dieser Stelle Herrn Professor Elliger, der mich zum Studium nicht notwendig hereditärer Torsionstheorien anregte.

III. Die Hauptergebnisse:

Das erste Ziel dieser Arbeit war es, ein konstruktives Verfahren zu beschreiben, das zu einem vorgegebenen vollständigen Verband $(W, \leq)$ einen assoziativen Ring R mit Einselement liefert, dessen Verband von Torsionsklassen für die Kategorie $\text{Mod-}R$ der R -Rechtsmoduln zu $(W, \leq)$ isomorph ist.

Ein solches Verfahren erschien mir in dreierlei Hinsicht als wichtig:

1. Es beantwortet grundsätzlich die Frage, ob es möglich ist, zu einem vorgegebenen vollständigen Verband $(W, \leq)$

einen assoziativen Ring R mit Einselement zu finden, dessen Verband von Torsionsklassen für $\text{Mod-}R$ ($W, \leq$) realisiert.

2. Es reduziert das Problem, diejenigen Ringe zu beschreiben, deren Verbände von Torsionsklassen einen vorgegebenen vollständigen Verband ($W, \leq$) realisieren, auf das Problem, diejenigen Ringe zu bestimmen, deren Verbände von Torsionsklassen zu einem vorgegebenen Verband von Torsionsklassen über einem Ring S isomorph sind.
3. Es erlaubt, verbandstheoretische Aussagen innerhalb der Modultheorie zu formulieren (vgl. Proposition 4.6 dieser Arbeit).

Es gelang mir nicht, mein erstes Ziel in voller Allgemeinheit zu verwirklichen. Ich konnte jedoch beweisen: (Theorem 4.1.a dieser Arbeit)

"Zu jedem vollständigen Verband ($W, \leq$) (W nicht notwendig kleine Menge) existiert eine additive Kategorie C , deren Verband von Torsionsklassen zu ($W, \leq$) isomorph ist."

Mit Hilfe des bekannten Einbettungstheorems von Mitchell (35) erhält man dann Korollar 4.3 dieser Arbeit:

"($W, \leq$) sei ein vollständiger Verband, W eine kleine Menge; - dann existiert ein assoziativer Ring R mit Einselement und eine volle Unterkategorie C von $\text{Mod-}R$, die den Nullmodul und R enthält, die bezüglich beliebigen direkten Summen abgeschlossen ist, deren sämtliche Objekte projektive R -Rechtsmoduln sind und deren Verband von Torsionsklassen zu ($W, \leq$) isomorph ist."

Das zweite Ziel dieser Arbeit bestand darin, ein Kriterium anzugeben, wann zwei Modulkategorien isomorphe Verbände von Torsionsklassen haben.

Es erwies sich als aussichtslos (vgl. die Bemerkung im Anschluß an Theorem 5.2 dieser Arbeit), ein solches Kriterium unmittelbar auf die Struktur der den Modulkategorien zugrundeliegenden Ringe zurückzuführen.

Es blieb die Möglichkeit, die Isomorphie der Verbände von Torsionsklassen durch Abbildungen zwischen den Modulkategorien zu begründen, die " orthogonale Paare" von Moduln auf "orthogonale Paare" von Moduln abbilden (vgl. Definition 5.1 dieser Arbeit).

Man hätte dadurch eine ganz ähnliche Situation wie in der Kategorientheorie erreicht. Hier läßt sich die Äquivalenz von Kategorien auf eine Isomorphie zwischen den den Kategorien zugrundeliegenden Skeletten zurückführen.

Ein torsionstheoretisches Skelett erhält man, wenn man Moduln, die gleiche Torsionsklassen erzeugen und co-erzeugen, nicht mehr unterscheidet.

Durch diese Klasseneinteilung ist die Struktur des Verbandes von Torsionsklassen für eine Modulkategorie tatsächlich eindeutig bestimmt, obwohl es unter Umständen möglich ist, daß eine nicht-hereditäre Torsionsklasse für Mod-R nicht durch eine einzelne Äquivalenzklasse eindeutig beschrieben wird (vgl. Problem 5.6.3 dieser Arbeit).

In Theorem 5.2 dieser Arbeit gebe ich ein allgemeines Kriterium an, daß u.a. zeigt, daß sich die Isomorphie zwischen Verbänden von Torsionsklassen für Modulkategorien auf Abbildungen der oben beschriebenen Art zurückführen läßt.

Das Hauptziel des letzten Teils dieser Arbeit war es, die Wechselbeziehungen zwischen dem Verband der Torsionsklassen über einem Ring R und dem Ring zu beschreiben. Hier wird noch einmal deutlich, wie wichtig es ist, innerhalb einer allgemeinen Ringtheorie den Verband aller Torsionsklassen für eine Modulkategorie zu betrachten. Um dies zu verdeutlichen, gebe ich zwei sehr einfache, aber typische Aussagen aus dem letzten Teil dieser Arbeit an.

Sei dazu R ein assoziativer Ring mit Einselement, $\text{Mod-}R$ die Kategorie der R -Rechtsmoduln, $(\mathcal{T}, \subset)$ der Verband der (allgemeinen) und $(\mathcal{T}_H, \subset)$ der Verband der hereditären Torsionsklassen für $\text{Mod-}R$. Es gilt:

1. "Jeder nicht-triviale R -Rechtsmodul besitzt genau dann einen maximalen Untermodul, wenn jede Torsionsklasse $\{0\} \neq T \in (\mathcal{T}, \subset)$ ein Atom von $(\mathcal{T}, \subset)$ enthält und die Atome von $(\mathcal{T}, \subset)$ mit den Atomen von $(\mathcal{T}_H, \subset)$ zusammenfallen" (vgl. Proposition 6.7 dieser Arbeit).
2. "Die Torsionstheorien für $\text{Mod-}R$ werden genau dann alle von einfachen R -Rechtsmoduln erzeugt, wenn R ein rechts-semiartinscher Ring ist und die Coatome von $(\mathcal{T}, \subset)$ mit den Coatomen von $(\mathcal{T}_H, \subset)$ zusammenfallen" (vgl. Bedingung (iii) von Korollar 8.5 und (52) Theorem 1).

IV. Die Verallgemeinerung

Bei der Untersuchung des Verbandes der Torsionsklassen für eine abelsche Kategorie spielen sehr abstrakte, lediglich von der "Galoiskorrespondenz" zwischen den Torsionsklassen und torsionsfreien Klassen abhängende

Überlegungen eine bedeutende Rolle. Eine Verallgemeinerung meiner Überlegungen bot sich geradezu an.

Nun ist die bloße Möglichkeit zur Abstraktion noch kein ausreichender Grund, diese tatsächlich zu vollziehen.

Daß ich dies dennoch tat, ist dem Umstand zu verdanken, daß es eine Vielzahl mathematischer Theorien gibt, wo ähnliche Überlegungen, wie ich sie in dieser Arbeit vollzog, benutzt werden (vgl. § 1 dieser Arbeit).

An dieser Stelle gilt mein Dank Herrn Professor Wischnewsky, der mich auf die enge Verbindung zwischen dem Zusammenhangsbegriff in der Topologie und dem Torsionsbegriff für abelsche Kategorien aufmerksam machte.

Ich habe mich bemüht, an allen Stellen dieser Arbeit, wo abstrakte Überlegungen eine Rolle spielen, neben dem Torsionsbegriff für abelsche Kategorien den Zusammenhangsbegriff für topologische Räume mitzuerfassen (vgl. Abschnitt 2.7 und Theorem 5.2 dieser Arbeit).

V. Die mathematische Sprache

1. Wir verwenden in dieser Arbeit die gleiche "Mengenlehre" wie in MacLane (32). Entsprechend zeichnen wir ein Universum aus und unterscheiden "kleine Mengen", "Mengen" und "Klassen". Die kleinen Mengen des Universums erfüllen die Axiome der von Zermelo, Fraenkel und Skolem entwickelten Mengenlehre.

Die kleinen Mengen M des Universums haben eine wohldefinierte Mächtigkeit, die mit $|M|$ bezeichnet sei. Unter einer Familie von Objekten sei in dieser Arbeit grundsätzlich eine kleine indizierte Menge verstanden

2. Sei C eine beliebige Kategorie, dann bezeichne $|C|$ ihre Objektklasse.
3. Sei M_R ein R -Rechtsmodul über einem assoziativen Ring R mit Einselement, dann sei $E(M_R)$ seine injektive Hülle.

Kapitel I: V- Theorien

Im ersten Paragraphen dieses Kapitels axiomatisieren wir den von Dickson (7) stammenden Begriff der Torsionstheorie für eine abelsche Kategorie $\mathcal{C}$.

Zur Motivation dieser Axiomatisierung geben wir Beispiele aus der Algebra und Topologie an.

Im Mittelpunkt des zweiten Paragraphen dieses Kapitels stehen die für diese Arbeit methodisch wichtigsten Begriffe der einfach erzeugten und einfach coerzeugten V - Klasse bzw. V -freien Klasse. - Mit Hilfe dieser Begriffe kann meiner Meinung nach eine allgemeine Theorie der V - Theorien aufgebaut werden. -

§ 1: Die Axiomatisierung des Begriffes "Torsionstheorie für eine abelsche Kategorie $\mathcal{C}$ "

1.1: Motivation

Wir betrachten folgende Situation:

O, P seien beliebige nicht leere Klassen. Zwischen den Objekten $M \in O$ und $N \in P$ sei eine Relation " R " definiert.

Wir interessieren uns für Paare von Teilklassen $(\underline{T}, \underline{F}) \subset O \times P$, die bezüglich " R " maximal sind.

Beispiele:

1.1.1: Galoistheorie

O sei ein "kommutativer" Körper, P seine Automorphismengruppe. Zwischen den Elementen $x \in O$, $f \in P$ sei folgende Relation " R " definiert:

$$- (x, f) \in R \iff f(x) = x \quad -$$

In der Galoistheorie für "kommutative" Körper studiert

man Paare $(L, U) \subset O \times P$, die folgende Bedingungen erfüllen:

- (i) $(x, f) \in R$ für alle $x \in L$ und alle $f \in U$.
- (ii) Für $y \in O$ folgt aus $(y, f) \in R$ für alle $f \in U$ stets $y \in L$.
- (iii) Für $\psi \in P$ folgt aus $(x, \psi) \in R$ für alle $x \in L$ stets $\psi \in U$.

L ist stets ein Unterkörper von O , U eine Untergruppe von P . Man nennt L den Fixkörper der Untergruppe U von P und U die Galoisgruppe der Körpererweiterung $L \subset O$.

1.1.2: Zentralisatoren

O sei eine beliebige Gruppe. Wir betrachten folgende Relation " R " $\subset O \times O$.

$$- (a, b) \in R \Leftrightarrow a \cdot b = b \cdot a -$$

Angenommen, das Paar $(U, V) \subset O \times O$ erfüllt bezüglich dieser Relation die Bedingungen (i) bis (iii) von Beispiel 1.1.1, dann ist U der Zentralisator von $V \subset O$ und V der Zentralisator von $U \subset O$.

1.1.3: Torsionstheorien für abelsche Kategorien C

C sei eine lokal kleine Ab 3 Kategorie mit der Objektklasse $|C|$ (Definition siehe (39)).

Die Relation " R " $\subset |C| \times |C|$ sei definiert durch:

$$- (M, N) \in R \Leftrightarrow \text{Hom}_C(M, N) = \{0\} -$$

Dickson (7) nennt ein Paar $(\underline{T}, \underline{F})$ von Teilklassen von $|C|$, das bezüglich " R " die Bedingungen (i) bis (iii) von Beispiel 1.1.1 erfüllt, eine Torsionstheorie für C .

Torsionstheorien im Sinne von Dickson erhalten ihre Bedeutung zum einen innerhalb einer allgemeinen "Radikaltheorie" und zum anderen innerhalb einer allgemeinen "Lokalisations-theorie".

(vgl. neben der Einleitung auch die Lehrbücher (10)
chapter 16, (49) chapter vi und (39) chapter 4)

Sei Ab die Kategorie der abelschen Gruppen. Torsionstheorien
im Sinne von Dickson sind Verallgemeinerungen der "klassi-
schen Torsionstheorie" ($\underline{T}, \underline{F}$) für Ab .

Dabei ist $\underline{T}$ die Klasse der Torsionsgruppen und $\underline{F}$ die
Klasse der torsionsfreien Gruppen.

1.1.4: Zusammenhängende topologische Räume

$\mathcal{T}$ sei die Kategorie der topologischen Räume mit der
Objektklasse $|\mathcal{T}|$. Auf $|\mathcal{T}|$ sei folgende Relation "R" de-
finiert:

- $(X, Y) \in R \iff \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$ besteht nur aus konstanten
Abbildungen. -

Sei $\underline{Z}$ die Klasse der zusammenhängenden topologischen
Räume und $\underline{U}$ die Klasse der total unzusammenhängenden topo-
logischen Räume, dann erfüllt das Paar $(\underline{Z}, \underline{U})$ die Bedingungen
(i) bis (iii) von Beispiel 1.1.1.

Preuß benutzt "R" in seinen Arbeiten (40), (41) und (42)
sowie in seinem Lehrbuch (43), um den Zusammenhangsbegriff
für topologische Räume zu verallgemeinern. Diese Verall-
gemeinerung benutzt er dazu, um die Beziehungen zwischen
den bekannten Trennungsaxiomen T_0 , T_1 , T_2 usw. und dem
Zusammenhangsbegriff zu studieren. In seiner Terminologie
besteht ein Paar $(\underline{T}, \underline{F})$ von Teilklassen von $|\mathcal{T}|$, das
bezüglich "R" die Bedingungen (i) bis (iii) von Beispiel
1.1.1 erfüllt, aus der Klasse $\underline{T}$ der $\underline{F}$ -zusammenhängenden
Räume und der Klasse $\underline{F}$ der total $\underline{F}$ -unzusammenhängenden
Räume. Einzelheiten hierzu findet man vor allem in (43).

Der Begriff der konstanten Abbildung läßt sich für
beliebige Kategorien definieren. Preuß weist in seinem
Lehrbuch (43) darauf hin, daß sich daher der Zusammenhangs-

begriff auf beliebige (verbundene) Kategorien ausdehnen läßt.

Wir halten fest, daß "R", für beliebige (verbundene) Kategorien definiert, eine Verallgemeinerung der Definition Dickson's (vgl. Beispiel 1.1.3) auf beliebige (verbundene) Kategorien liefert.

Die Beispiele 1.1.1 bis 1.1.4 zeigen, daß man eine "mengentheoretische" Axiomatisierung der Definition Dickson's (Beispiel 1.1.3) erhält, wenn man von der jeweils gewählten Relation "R" abstrahiert.

Definition 1.2:

O, P seien beliebige nicht leere Klassen, $R \subset O \times P$ eine Relation. Ein Paar $(\underline{T}, \underline{F}) \subset O \times P$ heißt V- Theorie für (O, P) , wenn gilt:

- (i) $(M, N) \in R$ für alle $M \in \underline{T}$ und alle $N \in \underline{F}$.
- (ii) Für $M \in O$ folgt aus $(M, N) \in R$ für alle $N \in \underline{F}$ stets $M \in \underline{T}$.
- (iii) Für $N \in P$ folgt aus $(M, N) \in R$ für alle $M \in \underline{T}$ stets $N \in \underline{F}$.

Im Hinblick auf Dickson's Definition hätten wir den Begriff V- Theorie für (O, P) auch wie folgt definieren können:

Definition 1.2':

O, P seien beliebige Klassen, $V: O \times P \rightarrow |C|$ eine Abbildung in eine konkrete Kategorie C mit Objektklasse $|C|$. Für $(A, B) \in O \times P$ bezeichne $\wedge$ das Minimum der Mächtigkeiten der kleinen Mengen $V(A, B) \in |C|$.

Ein Paar $(\underline{T}, \underline{F}) \subset O \times P$ heißt V- Theorie für (O, P) ,
wenn gilt:

- (i) $|\vee (M, N)| = \perp$ für alle $M \in \underline{T}$ und alle $N \in \underline{F}$.
(ii), (iii) - siehe Definition 1.2 (ii), (iii) -.

Es ist klar, daß die Definitionen 1.2 und 1.2' quivalent
sind. Welche der beiden Definitionen wir in Zukunft be-
nutzen werden, hängt vom jeweiligen Zusammenhang ab.

Im folgenden seien O, P stets nicht leere Klassen und
 $R \subset O \times P$ eine Relation.

1.3: Konstruktion von V- Theorien für (O, P)

(vgl. (49), chapter vi)

Seien $\underline{L}, \underline{S}$ Teilklassen von O bzw. P , dann erzeugt $\underline{L}$ eine
V- Theorie $(\underline{T}_{\underline{L}}, \underline{F}_{\underline{L}})$ für (O, P) , während $\underline{S}$ eine V- Theorie
 $(\underline{S}^{\underline{T}}, \underline{S}^{\underline{F}})$ für (O, P) coerzeugt.

Dazu sei:

$$\underline{F}_{\underline{L}} := \{ F \in P \mid (L, F) \in R \text{ für alle } L \in \underline{L} \}$$

$$\underline{T}_{\underline{L}} := \{ T \in O \mid (T, F) \in R \text{ für alle } F \in \underline{F}_{\underline{L}} \}$$

$$\underline{S}^{\underline{T}} := \{ T \in O \mid (T, S) \in R \text{ für alle } S \in \underline{S} \}$$

$$\underline{S}^{\underline{F}} := \{ F \in P \mid (T, F) \in R \text{ für alle } T \in \underline{S}^{\underline{T}} \}$$

Definition 1.4: (vgl. (49), chapter vi)

- (i) Eine Teilklassse $\underline{T} \subset O$ heißt V- Klasse für (O, P) ,
wenn $\underline{T} = \underline{T}_{\underline{T}}$ gilt.
(ii) Eine Teilklassse $\underline{F} \subset P$ heißt V-freie Klasse für (O, P) ,
wenn $\underline{F} = \underline{F}_{\underline{F}}$ gilt.

Wir erhalten folgende grundlegende Proposition, deren
elementarer Beweis dem Leser überlassen sei;

Proposition 1.5: Charakterisierung des Systems der
V- Theorien für (O,P)

- (i) Sei $R \subset O \times P$ eine Relation und $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ das System der V- Theorien für (O,P), wobei $\mathcal{T}$ das System der V- Klassen und $\mathcal{F}$ das System der V-freien Klassen für (O,P) sei; - dann gilt:
- (a) $\bigcup_{\underline{T} \in \mathcal{T}} \underline{T} = O$, $\bigcup_{\underline{F} \in \mathcal{F}} \underline{F} = P$
- (b) $(\underline{T}, \underline{F}), (\underline{T}, \underline{F}') \in (\mathcal{T}, \mathcal{F}) \Rightarrow \underline{F} = \underline{F}'$
- (c) $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ und $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ sind vollständige Verbände.
- (d) Die Zuordnung $\phi: (\mathcal{T}, \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{C})$ mit $\phi(\underline{T}) = \underline{F}$ für $(\underline{T}, \underline{F}) \in (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ ist ein Verbandsantihomomorphismus.
- (ii) Erfüllt umgekehrt ein Paar $(\mathcal{T}, \mathcal{F}) :=$
 $\{ (\underline{T}, \underline{F}) \subset O \times P \mid \underline{T} \in \mathcal{T}, \underline{F} \in \mathcal{F} \}$ obige Bedingungen
(a) bis (d), dann existiert eine Relation $R \subset O \times P$,
so daß $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ das System der V- Theorien für (O,P)
bezüglich "R" ist.

.

.

§ 2: Einfach erzeugte und einfach coerzeugte V- Klassen
bzw. V-freie Klassen für (O,P)

Definition 2.1:

- (i) Eine V- Klasse oder V-freie Klasse $\underline{H}$ für (O,P) heißt einfach erzeugt, wenn ein Objekt $M \in O$ existiert mit $\underline{H} = \underline{T}_M$ oder $\underline{H} = \underline{F}_M$.
Sie heißt einfach coerzeugt, wenn ein Objekt $N \in P$ existiert mit $\underline{H} = \underline{N}^T$ oder $\underline{H} = \underline{N}^F$.
- (ii) $\underline{L}, \underline{N}$ seien Teilklassen von O; $\underline{L}', \underline{N}'$ Teilklassen von P.
Wir definieren:

$$\underline{\underline{L}} \leq \underline{\underline{F}} \underline{\underline{N}} \quad \langle \neq \rangle \quad \underline{\underline{T}} \underline{\underline{L}} \subset \underline{\underline{T}} \underline{\underline{N}}$$

$$\underline{\underline{L'}} \leq \underline{\underline{F}} \underline{\underline{N'}} \quad \langle = \rangle \quad \underline{\underline{L'}} \underline{\underline{T}} \subset \underline{\underline{N'}} \underline{\underline{T}}$$

$$\underline{\underline{L}} \sim \underline{\underline{F}} \underline{\underline{N}} \quad \langle = \rangle \quad \underline{\underline{T}} \underline{\underline{L}} = \underline{\underline{T}} \underline{\underline{N}}$$

$$\underline{\underline{L'}} \sim \underline{\underline{F}} \underline{\underline{N'}} \quad \langle = \rangle \quad \underline{\underline{L'}} \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{N'}} \underline{\underline{T}}$$

Für $\{ M \in O \mid \underline{\underline{L}} \sim \underline{\underline{F}} M \}$ schreiben wir $[\underline{\underline{L}}]_{\underline{\underline{T}}}$, und
für $\{ M' \in P \mid \underline{\underline{L'}} \sim \underline{\underline{F}} M' \}$ schreiben wir $[\underline{\underline{L'}}]_{\underline{\underline{F}}}$.

2.2: Beispiele:

2.2.1: Modulkategorien

R sei ein assoziativer Ring mit Einselement, Mod-R die Kategorie der R-Rechtsmoduln. Die V- Klassen bzw. V-freien Klassen für $(|\text{Mod-R}|, |\text{Mod-R}|)$ bezüglich der in Beispiel 1.1.3 beschriebenen Relation heißen Torsionsklassen bzw. torsionsfreie Klassen für Mod-R (vgl. (49), chapter vi).

- a) Alle hereditären Torsionsklassen bzw. hereditären torsionsfreien Klassen für Mod-R (Definition siehe (49), chapter vi) sind sowohl einfach erzeugt als auch einfach coerzeugt. (Jans (21), Theorem 1.1)
- b) Für einen R-Rechtsmodul M_R bezeichne $Ra(M_R)$ sein Jacobson-Radikal (Definition siehe (49), chapter viii). Die Radikalmoduln, d.h. diejenigen R-Rechtsmoduln M_R mit $Ra(M_R) = M_R$, bilden eine i.a. nicht hereditäre Torsionsklasse für Mod-R. Sie wird - wie wohlbekannt ist - vom direkten Produkt der nicht-isomorphen einfachen R-Rechtsmoduln coerzeugt.
- c) $\underline{\underline{S}}$ sei eine nicht leere Klasse projektiver oder injektiver R-Rechtsmoduln. Die von $\underline{\underline{S}}$ erzeugte oder coerzeugte Torsionsklasse (torsionsfreie Klasse) für Mod-R ist stets einfach erzeugt bzw. einfach coerzeugt. Besteht

$\underline{S}$ aus projektiven R -Rechtsmoduln, folgt dies aus einem Satz von Kaplansky (24) oder (39), der besagt, daß jeder projektive R -Rechtsmodul direkte Summe abzählbar erzeugter R -Rechtsmoduln ist. Besteht $\underline{S}$ aus injektiven R -Rechtsmoduln, dann betrachten wir die nicht-isomorphen zyklischen Untermoduln der Moduln aus $\underline{S}$. S_R sei dann die direkte Summe ihrer injektiven Hüllen. Mit einem zum Beweis von Proposition 2.5 ((49), chapter vi) analogen Beweis folgt, daß $\underline{T} \subseteq \underline{S}$ bzw. $\underline{S} \subseteq \underline{T}$ oder $\underline{F} \subseteq \underline{S}$ bzw. $\underline{S} \subseteq \underline{F}$ von S_R erzeugt bzw. coerzeugt wird.

- d) Angenommen, die Torsionstheorien für $\text{Mod-}R$ bilden eine kleine Menge, dann sind alle Torsionsklassen (torsionsfreie Klassen) für $\text{Mod-}R$ sowohl einfach erzeugt als auch einfach coerzeugt. Wir betrachten dazu:

$$\text{Mod-}R \mid \sim_{\underline{T}} := \{ [M_R]_{\underline{T}} \mid M_R \in \text{Mod-}R \} \quad \text{bzw.}$$

$$\text{Mod-}R \mid \sim_{\underline{F}} := \{ [M_R]_{\underline{F}} \mid M_R \in \text{Mod-}R \}$$

Da die Torsionstheorien für $\text{Mod-}R$ - nach Voraussetzung - eine kleine Menge bilden, sind $\text{Mod-}R \mid \sim_{\underline{T}}$ und $\text{Mod-}R \mid \sim_{\underline{F}}$ kleine Mengen. Eine Torsionsklasse $\underline{T}$ für $\text{Mod-}R$ wird daher von der direkten Summe der nicht $\sim_{\underline{T}}$ -äquivalenten R -Rechtsmoduln $M_R \in \underline{T}$ erzeugt, während eine torsionsfreie Klasse $\underline{F}$ für $\text{Mod-}R$ vom direkten Produkt der nicht $\sim_{\underline{F}}$ -äquivalenten R -Rechtsmoduln $M_R \in \underline{F}$ coerzeugt wird.

Die hereditären Torsionstheorien für $\text{Mod-}R$ bilden stets eine kleine Menge (vgl. (49), chapter vi). Da das Problem, diejenigen Ringe zu charakterisieren, deren sämtliche Torsionstheorien für $\text{Mod-}R$ hereditär sind, nicht befriedigend gelöst ist (vgl. (52)), erscheint es um so schwieriger, diejenigen Ringe zu charakterisie-

ren, deren Torsionstheorien für $\text{Mod-}R$ eine kleine Menge bilden. Wir beweisen in diesem Zusammenhang folgende

Proposition 2.3: (vgl. (20), Satz 5.14)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) Die Torsionstheorien für $\text{Mod-}R$ bilden eine kleine Menge.
- (ii) Es existiert eine Kardinalzahl c , so daß alle R -Endomorphismenringe $\text{End}_R(M_R)$ von R -Rechtsmoduln M_R nicht triviale Endomorphismen f mit $|\text{Im } f| \leq c$ enthalten.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Mit (i) folgt zunächst, daß $\text{Mod-}R / \sim_{\underline{T}}$ eine kleine Menge ist. Wir wählen aus jeder Äquivalenzklasse $[M_R]_{\underline{T}} \in \text{Mod-}R / \sim_{\underline{T}}$ einen Repräsentanten M_R aus und bilden anschließend die direkte Summe S_R dieser Repräsentanten. Schließlich setzen wir $|S_R| := c$. Sei N_R ein R -Rechtsmodul. Es existiert ein direkter Summand $M_R \subset S_R$ mit $M_R \sim_{\underline{T}} N_R \Rightarrow \text{Hom}_R(M_R, N_R) \neq \{0\}$. Wir betrachten $0 \neq g \in \text{Hom}_R(M_R, N_R)$. Es folgt: $\text{Im } g \leq_{\underline{T}} M_R \sim_{\underline{T}} N_R \Rightarrow \text{Hom}_R(N_R, \text{Im } g) \neq \{0\}$. Wegen $|\text{Im } g| \leq |M_R| \leq c$ folgt (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Sei $\underline{T}$ eine beliebige Torsionsklasse für $\text{Mod-}R$. Wir betrachten die direkte Summe S_R der nicht-isomorphen R -Rechtsmoduln $M_R \in \underline{T}$ mit $|M_R| \leq c$. Wegen (ii) enthält jeder R -Rechtsmodul $N_R \in \underline{T}$ einen zu einem direkten Summanden von S_R isomorphen Untermodul. Mit Proposition 2.5 ((49), chapter vi) folgt, daß $\underline{T}$ von S_R erzeugt wird.

Die nicht-isomorphen R -Rechtsmoduln M_R , deren Mächtigkeit c nicht übersteigt, bilden eine kleine Menge " M ". Es folgt, daß die Anzahl der Torsionsklassen (Torsionstheorien) für $\text{Mod-}R$ $2^{|M|}$ nicht übersteigen kann.

2.2.2: Topologische Räume

$\mathcal{T}$ sei die Kategorie der topologischen Räume. Wir betrachten die V - Klassen und V -freien Klassen für $(|\mathcal{T}|, |\mathcal{T}|)$ bezüglich der in Beispiel 1.1.4 definierten Relation " R ".

Eine bezüglich " R " gewonnene V - Klasse $\underline{T}$ für $(|\mathcal{T}|, |\mathcal{T}|)$ heißt nach Preuß (vgl. etwa (43)) Klasse der $\underline{E}$ - zusammenhängenden Räume, während eine bezüglich " R " gewonnene V -freie Klasse $\underline{F}$ für $(|\mathcal{T}|, |\mathcal{T}|)$ nach Preuß als Klasse der total $\underline{E}$ - unzusammenhängenden Räume bezeichnet wird.

$\underline{E}$ ist dabei eine im Sinne von 1.3 $\underline{T}$ bzw. $\underline{F}$ coerzeugende Klasse topologischer Räume (vgl. hierzu auch Beispiel 1.1.4).

Wir weisen darauf hin, daß alle folgenden Beispiele auch im Lehrbuch von Preuß ((43), Kapitel 5 und 6) zu finden sind.

a) Sei $D_2 := \{0, 1\}$ der zweipunktige diskrete Raum.

Die Klasse $\underline{Z}$ der zusammenhängenden Räume (vgl. Beispiel 1.1.4) wird von D_2 coerzeugt (Preuß (43), Satz 5.1.2). Sie ist daher mit der Klasse der $\{D_2\}$ - zusammenhängenden Räume identisch.

b) Ein topologischer Raum $(X, \underline{X})$ ist genau dann $\{R\}$ - zusammenhängend (R sei mit der natürlichen Topologie versehen), wenn $\text{Hom } \mathcal{T}(X, R)$ ein Integritätsbereich ist (Preuß (43), Bemerkung 3 von 5.1.26). Es folgt, daß R zwar zusammenhängend, aber nicht $\{R\}$ - zusammen-

hängend ist.

- c) Die Klasse $\underline{W}$ der wegzusammenhängenden Räume ist für kein $\underline{E} \subset |\mathfrak{I}|$ mit der Klasse der $\underline{E}$ -zusammenhängenden Räume identisch (Preuß (43), Bemerkung 3 von 5.2.11).
- d) Sei $\underline{E} := \{ [0,1] \}$, wobei das abgeschlossene Intervall $[0,1]$ mit der natürlichen Topologie versehen sei, dann wird die Klasse $\underline{V}$ der total wegunzusammenhängenden Räume von $\underline{E}$ erzeugt (Preuß (43), Beispiel 3 von 6.2.7). $\underline{V}$ ist also einfach erzeugt.
- e) Die Klasse $\underline{T}_G$ der T_G -Räume (Definition siehe (43)) ist eine Klasse total $\underline{E}$ -unzusammenhängender Räume. Sie wird vom Sierpinski - Raum $S := (\{0,1\} ; \{0\}, \{0,1\}, \emptyset)$ coerzeugt (Preuß (43), Bemerkung 6.2.3). $\underline{T}_G$ ist daher einfach coerzeugt. Die $\{S\}$ -zusammenhängenden Räume bilden die Klasse $\underline{I}$ der indiskreten Räume. $\underline{I}$ wird von jedem mindestens zweipunktigen indiskreten Raum erzeugt. Dies folgt aus Proposition 2.6 dieser Arbeit.
- f) Die Klasse $\underline{T}_1$ der T_1 -Räume (Definition siehe (43)) ist eine Klasse total $\underline{E}$ -unzusammenhängender Räume. $\underline{T}_1$ ist nicht einfach coerzeugt (Preuß (43), Bemerkung 1 von 6.2.5). Hieraus folgt insbesondere (vgl. Beispiel 2.2.1.d), daß die Klassen $\underline{E}$ -zusammenhängender Räume keine kleine Menge bilden.
- g) Die Klassen $\underline{T}_i$ der T_i -Räume für $i \geq 2$ (Definition siehe (43)) lassen sich nicht mehr als Klassen total $\underline{E}$ -unzusammenhängender Räume auffassen (Preuß (43), Bemerkung 4 von 6.2.9 und Bemerkung 3 von 6.3.6). Es gelingt Preuß jedoch durch die Einführung zusätzlicher Operatoren auf $|\mathfrak{I}|$, diese Klassen mitzuerfassen und ihre Verwandtschaft zum Zusammenhangsbegriff zu verdeutlichen.

2.2.3: Minimale und maximale V- Klassen bzw. V-freie Klassen für (O,P)

Wir übertragen die Begriffe minimale und maximale hereditäre Torsionsklasse bzw. hereditäre torsionsfreie Klasse für $\text{Mod-}R$ (vgl. (3), (4) und (14)) in die Terminologie der V- Theorien für (O,P) und sprechen von minimalen und maximalen V- Klassen bzw. V-freien Klassen für (O,P) .

Proposition 2.4:

(i) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\underline{T}$ ist eine minimale V- Klasse für (O,P) .

(b) $\underline{T} = [M] \underline{T} \cup \underline{P} \underline{T}$ für ein $M \in O \setminus \underline{P} \underline{T}$.

(ii) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a') $\underline{F}$ ist eine minimale V-freie Klasse für (O,P) .

(b') $\underline{F} = [N] \underline{F} \cup \underline{F}_0$ für ein $N \in P \setminus \underline{F}_0$.

Bemerkung:

Minimale V- Klassen für (O,P) sind also insbesondere einfach erzeugt, während maximale einfach coerzeugt sind. Entsprechendes gilt, wenn man die Begriffe einfach erzeugt und einfach coerzeugt miteinander vertauscht, für minimale und maximale V-freie Klassen für (O,P) .

Beweis von Proposition 2.4:

Wir beweisen Aussage (i) der Proposition.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Sei $\underline{T}$ eine minimale V- Klasse für (O,P) und $M \in \underline{T} \setminus \underline{P} \underline{T}$ beliebig gewählt. $\Rightarrow \underline{P} \underline{T} \subsetneq \underline{T}_M \subset \underline{T} \Rightarrow \underline{T}_M = \underline{T} \Rightarrow$
 $\underline{T} \setminus \underline{P} \underline{T} = [M] \underline{T} \Rightarrow \underline{T} = [M] \underline{T} \cup \underline{P} \underline{T}.$

(b) $\Rightarrow$ (a)

Sei $\underline{T} = [M]_{\underline{T}} \cup P\underline{T}$ für ein $M \in O \setminus P\underline{T}$ eine V-Klasse für (O, P) . Angenommen: $P\underline{T} \subset \underline{T}' \subsetneq \underline{T}$ für eine V-Klasse $\underline{T}'$ für $(O, P) \Rightarrow M \notin \underline{T}' \Rightarrow \underline{T}' = P\underline{T}$.

2.2.3.a: Modulkategorien (vgl. Beispiel 2.2.1)

Über einem assoziativen Ring R mit Einselement sind die Äquivalenzklassen $[M_R]_{\underline{T}}$ bezüglich Erweiterungen und direkten Summen abgeschlossen, während die Äquivalenzklassen $[M_R]_{\underline{F}}$ bezüglich Erweiterungen und direkten Produkten abgeschlossen sind. Dies folgt etwa mit dem im Beweis zu Proposition 2.1 ((49), chapter vi) bei der Richtung (a) $\Rightarrow$ (b) benutzten Argument. Wir erhalten mit Proposition 2.1 ((49), chapter vi) das

Korollar 2.5:

Folgende Aussagen für R -Rechtsmoduln M_R sind äquivalent:

- (a) $[M_R]_{\underline{T}}$ ist bezüglich nicht-trivialen Bildern, Erweiterungen und direkten Summen abgeschlossen.
- (b) M_R erzeugt eine minimale Torsionsklasse für $\text{Mod-}R$.

Entsprechend sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a') $[M_R]_{\underline{F}}$ ist bezüglich nicht-trivialen Untermoduln, Erweiterungen und direkten Produkten abgeschlossen.
 - (b') M_R coerzeugt eine minimale torsionsfreie Klasse für $\text{Mod-}R$.
-

Eine ausführliche Untersuchung minimaler und maximaler Torsionsklassen (torsionsfreier Klassen) für $\text{Mod-}R$ erfolgt in Kapitel III dieser Arbeit. Beispiele minimaler und maximaler Torsionsklassen (torsionsfreier Klassen) für $\text{Mod-}R$

finden sich dort.

2.2.3.b: Topologische Räume (vgl. Beispiel 2.2.2)

Es ist leicht, für die Kategorie $\mathcal{T}$ der topologischen Räume die minimalen und maximalen Klassen $\underline{E}$ - zusammenhängender bzw. total $\underline{E}$ - unzusammenhängender Räume zu bestimmen. Aus den Bemerkungen 1 und 2 von 5.1.6 und Satz 5.1.22 von Preuß (43) folgt nämlich die

Proposition 2.6:

- (i) Die Klasse $\underline{I}$ der indiskreten Räume ist die eindeutig bestimmte minimale Klasse $\underline{E}$ - zusammenhängender Räume, die in jeder nicht-trivialen Klasse $\underline{E}$ - zusammenhängender Räume enthalten ist. Dementsprechend ist die Klasse $\underline{T}_G$ der T_G - Räume die eindeutig bestimmte maximale Klasse total $\underline{E}$ - unzusammenhängender Räume, die jede echte Klasse total $\underline{E}$ - unzusammenhängender Räume enthält.
- (ii) Die Klasse $\underline{Z}$ der zusammenhängenden Räume ist die eindeutig bestimmte maximale Klasse $\underline{E}$ - zusammenhängender Räume, die jede echte Klasse $\underline{E}$ - zusammenhängender Räume enthält. Dementsprechend ist die Klasse $\underline{U}$ der total unzusammenhängenden Räume die eindeutig bestimmte minimale Klasse total $\underline{E}$ - unzusammenhängender Räume, die in jeder nicht-trivialen Klasse total $\underline{E}$ - unzusammenhängender Räume enthalten ist.
- —
•

2.7: Begründung einer allgemeinen Theorie der V- Theorien

Ziel dieses Abschnitts ist eine "innere" Charakterisierung der V- Klassen bzw. V-freien Klassen für (O, P) , wie sie etwa in Proposition 16.8.A (10) oder Proposition 2.1 bzw. 2.2 ((49), chapter vi) für Torsionsklassen bzw. torsionsfreie Klassen für lokalkleine Ab $\mathfrak{A}$ und Ab $\mathfrak{A}^*$ Kategorien (Definition siehe (39)) vorgenommen wurde.

Wir nehmen für den Rest dieses Paragraphen an, daß die V- Klassen und V-freien Klassen für (O, P) folgende Bedingungen erfüllen:

- V 1: Jede von einer kleinen Menge von Objekten aus O bzw. P erzeugte bzw. coerzeugte V- Klasse (V-freie Klasse) für (O, P) ist einfach erzeugt bzw. einfach coerzeugt.
- V 2: Seien $M \in O$, $N \in P$ mit $M \leq_{\underline{O}} \underline{S}$, $\underline{S}' \leq_{\underline{P}} N$ für Teilklassen $\underline{S} \subset O$, $\underline{S}' \subset P$, dann existieren kleine Teilmengen $\underline{U} \subset \underline{S}$, $\underline{U}' \subset \underline{S}'$ mit $M \leq_{\underline{O}} \underline{U}$ und $\underline{U}' \leq_{\underline{P}} N$.

Die Bedingungen V 1 und V 2 wurden durch folgende Überlegung motiviert:

C sei eine lokalkleine Ab $\mathfrak{A}$ und Ab $\mathfrak{A}^*$ Kategorie, $\tilde{\mathfrak{A}}$ die Kategorie der topologischen Räume. Auf $|C|$ sei die in Beispiel 1.1.3 angegebene Relation "R" definiert, während auf $|\tilde{\mathfrak{A}}|$ die in Beispiel 1.1.4 angegebene Relation "R'" definiert sei.

Seien $\underline{S}$ eine Teilklassse von $|C|$, $\{M_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Objekten aus $|C|$, $M \in |C|$ und $\underline{E}$ eine Teilklassse von $|\tilde{\mathfrak{A}}|$, $\{N_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Objekten aus $|\tilde{\mathfrak{A}}|$, $N \in |\tilde{\mathfrak{A}}|$; - dann gelten folgende - leicht nachrechenbare - Beziehungen:

1. $(\bigoplus_{i \in I} M_i, M) \in R \Leftrightarrow (M_i, M) \in R$ für alle $i \in I$
 $(M, \prod_{i \in I} M_i) \in R \Leftrightarrow (M, M_i) \in R$ für alle $i \in I$
 (vgl. Proposition 2.1 bzw. 2.2 (49), chapter vi)
- 1.' $(\prod_{i \in I} N_i, N) \in R' \Leftrightarrow (N_i, N) \in R'$ für alle $i \in I$
 $(N, \prod_{i \in I} N_i) \in R' \Leftrightarrow (N, N_i) \in R'$ für alle $i \in I$
 (vgl. die Sätze 5.1.9, 5.1.20 und das Korollar im
 Anschluß an Satz 6.2.8 in (43))
2. $M \leq_{\underline{T}} \underline{S} \Leftrightarrow$ Zu jedem nicht - trivialen Bild F von M
 existiert ein $S \in \underline{S}$ mit $(S, F) \notin R$.
 $\underline{S} \leq_{\underline{F}} M \Leftrightarrow$ Zu jedem nicht - trivialen Unterobjekt
 T von M existiert ein $S \in \underline{S}$ mit $(T, S) \notin R$.
- 2.' $N \leq_{\underline{T}} \underline{E} \Leftrightarrow$ Zu jedem nicht - trivialen Bild G von N
 existiert ein $E \in \underline{E}$ mit $(E, G) \notin R'$.
 $\underline{E} \leq_{\underline{F}} N \Leftrightarrow$ Zu jedem nicht - trivialen Unterraum U
 von N existiert ein $E \in \underline{E}$ mit $(U, E) \notin R'$.

Die unter (1) bzw. (1') aufgeführten Beziehungen garantieren, daß die Torsionsklassen und torsionsfreien Klassen für C , sowie die $\underline{E}$ - zusammenhängenden und total $\underline{E}$ - unzusammenhängenden topologischen Räume Bedingung V 1 erfüllen. V 1 verallgemeinert also die unter (1) bzw. (1') aufgeführten Beziehungen.

Da C lokal klein, $\mathfrak{J}$ sogar konkret ist, garantieren die unter (2) bzw. (2') aufgeführten Beziehungen, daß die Torsionsklassen und torsionsfreien Klassen für C sowie die $\underline{E}$ - zusammenhängenden und total $\underline{E}$ - unzusammenhängenden topologischen Räume Bedingung V 2 erfüllen. V 2 verallgemeinert also die unter (2) bzw. (2') aufgeführten Beziehungen.

Wir erhalten die

Proposition 2.8:

$\underline{T}$, $\underline{F}$ seien Teilklassen von O bzw. P .

(i) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\underline{T}$ ist eine V-Klasse für (O, P) .

(b) $\underline{T}$ erfüllt folgende Bedingungen:

T 1) Sei $M \in \underline{T}$ und $N \leq \underline{T} M \Rightarrow N \in \underline{T}$.

T 2) Sei $\{M_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Objekten aus $\underline{T}$ und $M \sim \underline{T} \{M_i\}_{i \in I} \Rightarrow M \in \underline{T}$.

(ii) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\underline{F}$ ist eine V-freie Klasse für (O, P) .

(b) $\underline{F}$ erfüllt folgende Bedingungen:

F 1) Sei $L \in \underline{F}$ und $L \leq \underline{F} K \Rightarrow K \in \underline{F}$.

F 2) Sei $\{L_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Objekten aus $\underline{F}$ und $L \sim \underline{F} \{L_i\}_{i \in I} \Rightarrow L \in \underline{F}$.

Bemerkung:

Die Bedingungen T 1 bzw. F 1 verallgemeinern die in den Propositionen 2.1 und 2.2 ((49), chapter vi) angegebenen Bedingungen, daß $\underline{T}$ bezüglich Bildern und $\underline{F}$ bezüglich Unterobjekten abgeschlossen ist, während die Bedingungen T 2 und F 2 die Bedingungen, daß $\underline{T}$ bezüglich Erweiterungen und direkten Summen und $\underline{F}$ bezüglich Erweiterungen und direkten Produkten abgeschlossen ist, verallgemeinern.

Beweis von Proposition 2.8:

Wegen der Dualität zwischen den V-Klassen und V-freien Klassen für (O, P) genügt es, Aussage (i) der Proposition zu beweisen.

Die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) ist trivial. Wir zeigen die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a).

Angenommen, $\underline{T} \subset O$ erfüllt die Bedingungen T 1 und T 2.

Es genügt zu zeigen $\underline{T} \subseteq \underline{T}$.

Sei dazu $L \in \underline{T}$ $\Rightarrow L \leq \underline{T}$. Mit V 2 existiert eine Familie $\{M_i\}_{i \in I}$ von Objekten aus $\underline{T}$ mit $L \leq \underline{T} \{M_i\}_{i \in I}$.

Wegen V 1 existiert ein $M \in O$ mit $M \sim \underline{T} \{M_i\}_{i \in I}$.

Aus T 2 folgt $M \in \underline{T}$, woraus mit T 1 $L \in \underline{T}$ folgt.

.

.

Kapitel II: Torsionsklassen für additive Kategorien
und ein Isomorphiekriterium für Verbände
von V - Klassen

Im Mittelpunkt dieses Kapitels stehen die in der Einleitung beschriebenen Hauptergebnisse dieser Arbeit. Um diese Ergebnisse vorzubereiten, beweisen wir in § 3 einige grundlegende Lemmata.

In § 4 beweisen wir unser erstes Hauptergebnis und geben die unserer Meinung nach interessantesten Folgerungen aus diesem Ergebnis an.

Hauptziel von § 5 ist der Beweis eines Isomorphiekriteriums für Verbände von V - Klassen.

§ 3: Grundlegende Lemmata

C sei eine beliebige präadditive Kategorie (Definition siehe (39)). Wir bezeichnen die Hom_C -Theorien im Sinne von Definition 1.2' als Torsionstheorien für C und sprechen entsprechend von Torsionsklassen $\underline{T}$ bzw. torsionsfreien Klassen $\underline{F}$ für C .

Torsionstheorien für C sind also Paare von Teilklassen von $|C|$, die die in Beispiel 1.1.3 beschriebenen Bedingungen erfüllen. Insbesondere ist das klassische Paar $(\underline{T}, \underline{F})$ der Torsionsgruppen $T \in \underline{T}$ und torsionsfreien Gruppen $F \in \underline{F}$ eine Torsionstheorie für die präadditive Kategorie der abelschen Gruppen (vgl. Beispiel 1.1.3).

Lemma 3.1:

O sei eine beliebige Klasse und $R \subset O \times O$ eine Relation.
Es gilt:

- (i) Erfüllen die bezüglich R definierten V - Klassen und V - freien Klassen für (0,0) die Bedingungen:
- (a) Es existiert ein Objekt $L \in O$ mit $\underline{L}_T = \underline{F}_L = 0$.
- (b) $M \notin \underline{F}_M$ für alle $M \not\sim_T L$; - dann existiert eine additive Kategorie C, deren Verband von Torsionsklassen zum Verband der V- Klassen für (0,0) isomorph ist.
- (ii) Umgekehrt erfüllen die Torsionsklassen und torsionsfreien Klassen für eine additive Kategorie C stets obige Bedingungen (a) und (b).

Bemerkung:

Sei $\mathcal{J}$ die Kategorie der topologischen Räume. Man sieht leicht, daß die $\underline{E}$ - zusammenhängenden und total $\underline{E}$ - unzusammenhängenden Räume die Bedingungen (a) und (b) des Lemmas erfüllen. Der Verband $(\mathcal{J}, C)$ der Klassen $\underline{E}$ - zusammenhängender Räume ist also zu einem Verband von Torsionsklassen für eine additive Kategorie C isomorph (vgl. Theorem 4.1).

Beweis von Lemma 3.1:

ad i)

$\mathbb{Z}|_{4\mathbb{Z}}$ sei der vierelementige Restklassenring der ganzen Zahlen. Wir konstruieren eine präadditive Kategorie $\bar{C}$ mit Objektklasse $\bar{O} := \{ [M]_{\underline{T}} \cap [M]_{\underline{F}} \mid M \in O \}$ und definieren:

$$\text{Hom}_{\bar{C}}(\bar{M}, \bar{N}) = \{0\} \quad , \text{ falls } N \in \underline{F}_M$$

$$\text{Hom}_{\bar{C}}(\bar{M}, \bar{N}) \cong 2\mathbb{Z}|_{4\mathbb{Z}} \quad , \text{ falls } M \neq N \text{ und } N \notin \underline{F}_M$$

$$\text{Hom}_{\bar{C}}(\bar{M}, \bar{N}) \cong \mathbb{Z}|_{4\mathbb{Z}} \quad \text{sonst}$$

Die Wahl von $\bar{0}$ gewährleistet, daß diese Definitionen widerspruchsfrei sind.

Die Addition und Verknüpfung der Morphismen in $\bar{C}$ sei die Addition und Verknüpfung der Restklassen in $\mathbb{Z} \mid_{4\mathbb{Z}}$. $\bar{C}$ wird so zu einer präadditiven Kategorie mit dem Null-objekt $\bar{L}$.

C sei dann die "freie additive" Kategorie über $\bar{C}$ (vgl. (32)). Wir überlassen dem Leser den einfachen Nachweis dafür, daß der Verband der Torsionsklassen für C zum Verband der V - Klassen für $(0,0)$ isomorph ist.

ad (ii)

In einer präadditiven Kategorie C mit Nullobjekt gilt für ein von Null verschiedenes Objekt M stets:

$|\text{Hom}_C(M, M)| \geq 2$. Der Beweis dieser Tatsache ist trivial und daher dem Leser überlassen. Man verifiziert jetzt sofort die Bedingungen (a) und (b) von (i).

Beispiel 3.2:

Wir wollen zeigen, daß es 1.a. nicht möglich ist, zu einer kleinen präadditiven Kategorie C eine präadditive Kategorie C' zu finden, die C umfaßt, bezüglich Kernen oder Cokernen abgeschlossen ist und deren Verband von Torsionsklassen zum entsprechenden Verband für C isomorph ist.

Die Kategorie C habe neben dem Nullobjekt lediglich die Objekte M, N und die Homomorphismenmengen:

$$\text{Hom}_C(M, N) = \{\sigma\}$$

$$\text{Hom}_C(M, M) \cong \text{Hom}_C(N, N) \cong \mathbb{Z} \mid_{2\mathbb{Z}} \text{ und}$$

$$\text{Hom}_C(N, M) \cong \mathbb{2Z} \mid_{4\mathbb{Z}}.$$

Die Additionen und Verknüpfungen in C seien die Additionen und Verknüpfungen der entsprechenden Restklassen. Der Verband der Torsionsklassen für C hat folgendes Aussehen:

$$\{0\} = M \stackrel{T}{=} \subsetneq \frac{T}{*} M = N \stackrel{T}{=} \subsetneq \frac{T}{*} N = 0 \stackrel{T}{=} = |C|.$$

Angenommen, der Homomorphismus $\bar{2}: N \rightarrow M$ hat in einer C umfassenden präadditiven Kategorie C' einen Kern (K, f) , dann gilt:

$$N \stackrel{T}{=} \subsetneq \frac{T}{*} K \stackrel{T}{=}.$$

Die Inklusion $N \stackrel{T}{=} \subsetneq \frac{T}{*} K \stackrel{T}{=}$ ist trivial. Da $\text{Hom}_C(N, N)$ außer der Identität nur den trivialen Homomorphismus besitzt, folgt:

$\text{Hom}_{C'}(N, K) = \{0\}$, da andernfalls f kein Monomorphismus wäre. C' enthält also die Kette:

$$M \stackrel{T}{=} \neq N \stackrel{T}{=} \subsetneq \frac{T}{*} K \stackrel{T}{=} \subsetneq \frac{T}{*} 0 \stackrel{T}{=} = |C|.$$

Setzen wir voraus, daß $\bar{2}: N \rightarrow M$ in einer C umfassenden Kategorie C' einen Cokern $(\neq, L)$ besitzt, folgt durch einen analogen Schluß:

$$\frac{T}{*} L \subsetneq \frac{T}{*} M.$$

$|C'|$ enthält daher die Kette:

$$\{0\} \subsetneq \frac{T}{*} L \subsetneq \frac{T}{*} M \neq \frac{T}{*} N.$$

Lemma 3.3:

Die im Beweis zu Lemma 3.1 konstruierte präadditive Kategorie $\bar{C}$ läßt sich in eine präadditive Kategorie C mit folgenden Eigenschaften einbetten:

- (i) Der Verband der Torsionsklassen für C ist zum Verband der Torsionsklassen für $\bar{C}$ isomorph.
- (ii) Jeder Homomorphismus $f: M \rightarrow N$ für Objekte $M, N \in |C|$ mit $M \not\sim_{\frac{T}{*}} N$ besitzt in C einen Kern und einen

Cokern.

Beweis:

Die Objekte von $\bar{C}$ werden im folgenden nicht überstrichen. Wir setzen $\bar{C} := C_1$ und konstruieren eine präadditive Kategorie $C_1 \subset C_2$ wie folgt:

1. Zu $\sigma \nmid f: M \rightarrow N$ mit $M, N \in |C_1|$, $M \nmid_{\mathbb{T}} N$ definieren wir Objekte M_f (Kerne) und ${}_fN$ (Cokerne) (f besitzt in C_1 weder einen Kern noch einen Cokern).
2. Für $S \in |C_1|$ sei:
 - a) $\text{Hom}_{C_2}(M_f, S) \cong \text{Hom}_{C_2}(S, {}_fM) \cong \mathbb{Z}|_{4\mathbb{Z}}$ und $\text{Hom}_{C_2}(S, M_f) \cong \text{Hom}_{C_2}({}_fM, S) \cong 2\mathbb{Z}|_{4\mathbb{Z}}$, falls $S \sim_{\mathbb{T}} M$.
 - b) $\text{Hom}_{C_2}(M_f, S) \cong \text{Hom}_{C_2}({}_fM, S) \cong \text{Hom}_{C_1}(M, S)$ und $\text{Hom}_{C_2}(S, M_f) \cong \text{Hom}_{C_2}(S, {}_fM) \cong \text{Hom}_{C_1}(S, M)$, falls $S \nmid_{\mathbb{T}} M$.

Weiter gelte:

- c) $\text{Hom}_{C_2}(M_f, N_g) \cong \text{Hom}_{C_2}(M_f, {}_gN) \cong \text{Hom}_{C_2}({}_fM, {}_gN) \cong \mathbb{Z}|_{4\mathbb{Z}}$ und $\text{Hom}_{C_2}({}_fM, N_g) \cong 2\mathbb{Z}|_{4\mathbb{Z}}$, falls $M \sim_{\mathbb{T}} N$.
- d) $\text{Hom}_{C_2}(M_f, N_g) \cong \text{Hom}_{C_2}(M_f, {}_gN) \cong \text{Hom}_{C_2}({}_fM, {}_gN) \cong \text{Hom}_{C_2}({}_fM, N_g) \cong \text{Hom}_{C_1}(M, N)$, falls $M \nmid_{\mathbb{T}} N$.
3. Die Addition in C_2 sei die Addition von Restklassen in $\mathbb{Z}|_{4\mathbb{Z}}$.
4. Seien $K, L \in |C_1|$.

a) Wir betrachten die Situationen:

$$\begin{array}{ccc} M_f & \xrightarrow{g} & K \xrightarrow{h} L \quad \text{und} \\ {}_fM & \xrightarrow{g} & K \xrightarrow{h} L \end{array}$$

Angenommen, (K, h) ist Kern oder (h, L) ist Cokern

in C_1 , dann sei für alle $f \in \text{Hom}_{C_1}(K, L)$ $f \circ g$ die Restklassenmultiplikation in $\mathbb{Z}|_{4\mathbb{Z}}$,
Andernfalls sei $f \circ g = 0$.

b) Die Situationen:

$$K \xrightarrow{h} L \xrightarrow{g} M_f$$

$$K \xrightarrow{h} L \xrightarrow{g} {}_fM \quad \text{behandeln wir analog.}$$

c) In allen anderen Fällen sei die Verknüpfung in C_2 die Restklassenmultiplikation in $\mathbb{Z}|_{4\mathbb{Z}}$.

5.a) C_2 wird durch diese Definitionen zu einer präadditiven Kategorie, die C_1 umfaßt.

b) Der Verband der Torsionsklassen für C_2 ist zum entsprechenden Verband für C_1 isomorph.

c) Die Kerne und Cokerne von C_1 bleiben Kerne und Cokerne in C_2 .

d) Jeder Homomorphismus $f: M \rightarrow N$ für $M, N \in |C_1|$,
 $M \not\sim_{\mathbb{T}} N$ besitzt in C_2 einen Kern und einen Cokern.
Wir überlassen es dem Leser, die Punkte 5.a bis 5.d zu verifizieren.

6. Unser Konstruktionsverfahren liefert also eine aufsteigende Kette präadditiver Kategorien:

$$C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \dots \subset C_{n-1} \subset C_n \subset \dots,$$

so daß $C_{n-1} \subset C_n$ die unter (5) aufgeführten Bedingungen erfüllt.

$$\text{Wir setzen daher } C := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i.$$

Es ist klar, daß C die Bedingungen des Lemmas erfüllt.

.

.

§ 4: Die Struktur des Verbandes der Torsions-
klassen für eine additive Kategorie C

Wir beweisen zunächst das

Theorem 4.1:

Zu jedem vollständigen Verband $(W, \leq)$ (W nicht notwendig
kleine Menge) existiert

- a) eine additive Kategorie C, deren Verband von Tor-
sionsklassen zu $(W, \leq)$ isomorph ist und
- b) eine präadditive Kategorie C', deren Verband von
Torsionsklassen zu $(W, \leq)$ isomorph ist und in der
jeder Homomorphismus $f: M \rightarrow N$ zwischen Objekten
 $M, N \in |C'|$ mit $M \not\sim_{\mathbb{T}} N$ einen Kern und einen Cokern
besitzt.

Darüberhinaus sind die Torsionsklassen für C bzw. C'
sowohl einfach erzeugt als auch einfach coerzeugt.

Beweis:

Wegen der Lemmata 3.1 und 3.3 genügt es, eine Klasse O
und eine Relation $R \subset O \times O$ anzugeben, so daß die be-
züglich "R" definierten V- Klassen und V-freien Klassen
für (O, O) folgende Bedingungen erfüllen:

- (a) $(W, \leq)$ ist zum Verband der V- Klassen für (O, O)
isomorph.
- (b) Es existiert ein $L \in O$ mit $L_{\mathbb{T}} = \underline{F}_L = O$.
- (c) $M \notin \underline{F}_M$ für alle $M \not\sim_{\mathbb{T}} L$.
- (d) Alle V- Klassen für (O, O) sind sowohl einfach
erzeugt als auch einfach coerzeugt.

Mit A sei das kleinste und mit X das größte Element
von $(W, \leq)$ bezeichnet.

Wir betrachten die Klasse:

$$O := \{ (M,N) \in W \times W \mid M \not\leq N \} \cup \{ (A,X) \}$$

$R \subset O \times O$ wird wie folgt definiert:

$$((M,N), (K,L)) \in R \iff M \leq L.$$

Für die bezüglich "R" definierten V- Klassen und V-freien Klassen für (O,O) gilt:

1. $(A,X) \overset{T}{=} \overset{F}{=} (A,X) = O$
2. $((M,N), (M,N)) \notin R$ für $(M,N) \neq (A,X) \Rightarrow (M,N) \notin \overset{F}{=}(M,N)$
3. Alle V- Klassen für (O,O) sind sowohl einfach erzeugt als auch einfach coerzeugt.

Sei dazu $\underline{S} \subset O$ eine beliebige Klasse. O.E. gelte

$$(S,T) \neq (A,X) \text{ für mindestens ein } (S,T) \in \underline{S}.$$

Wir betrachten das Objekt $(M,N) \in O$ mit

$$M = \sup \{ S \mid (S,T) \in \underline{S} \} \text{ und } N = \inf \{ T \mid (S,T) \in \underline{S} \}$$

Es gilt:

- a) $M \not\leq N$
- b) $(K,L) \in \overset{F}{=}(M,N) \iff M \leq L \iff S \leq L$ für alle $(S,T) \in \underline{S}$, d.h. die von $\underline{S}$ erzeugte V- Klasse für (O,O) wird von (M,N) erzeugt.
- c) $(K,L) \in \overset{T}{=}(M,N) \iff K \leq N \iff K \leq T$ für alle $(S,T) \in \underline{S}$, womit (3) endgültig bewiesen ist.

Es bleibt zu zeigen, daß der Verband $(\mathfrak{V}, \subset)$ der

V- Klassen für (O,O) zu $(W, \leq)$ isomorph ist.

Wir definieren dazu Abbildungen:

$$\phi: (W, \leq) \longrightarrow (\mathfrak{V}, \subset) \text{ durch}$$

$$\phi(M) = (N,M) \overset{T}{=} \text{ für } N \not\leq M \text{ und } M < X$$

$$\phi(X) = (A,X) \overset{T}{=} \text{ sowie}$$

$$\psi: (\mathfrak{V}, \subset) \longrightarrow (W, \leq) \text{ durch}$$

$$\psi((N,M) \overset{T}{=}) = M.$$

1. ϕ und ψ sind wohldefiniert, wie man sofort einsieht.
2. Aus den Definitionen von ϕ und ψ folgt, daß ϕ und ψ zueinander inverse Abbildungen sind.
3. ϕ und ψ sind Verbandshomomorphismen. Diese Tatsache folgt unmittelbar aus der Definition der V-Klassen für $(0,0)$.

Das Theorem ist bewiesen.

Korollar 4.2:

$(W, \leq)$ sei ein vollständiger Verband (W nicht notwendig kleine Menge); dann existiert eine freie abelsche Kategorie C und eine volle additive Unterkategorie C' von C, so daß $(W, \leq)$ zum Verband der Torsionsklassen für C' isomorph ist.

Beweis:

Freyd (9) und später Adelman (1) haben gezeigt, daß sich jede additive Kategorie voll und treu in eine freie abelsche Kategorie einbetten läßt.

Korollar 4.3:

$(W, \leq)$ sei ein vollständiger Verband, W eine kleine Menge; dann existiert ein assoziativer Ring R mit Element und eine volle Unterkategorie C von Mod-R, die den Nullmodul und R enthält, die bezüglich beliebigen direkten Summen abgeschlossen ist, deren sämtliche Objekte projektive R- Rechtsmoduln sind und deren Verband von Torsionsklassen zu $(W, \leq)$ isomorph ist.

Beweis:

Das Korollar folgt aus Theorem 4.1 und folgendem Theorem,

das wir dem Buch von Lambek (29) entnommen haben, dessen Beweis aber im wesentlichen auf Mitchell (35), (36) zurückgeht:

- "Jede kleine additive Kategorie ist zu einer vollen Unterkategorie C von $\text{Mod-}R$ über einem assoziativen Ring R mit Einselement äquivalent. Darüberhinaus erhält der Inklusionsfunktor Limiten, erzeugt C $\text{Mod-}R$ und sind alle Moduln aus C projektiv." -

.

.

Wir wollen eine weitere Anwendung von Theorem 4.1 angeben.

Dazu verallgemeinern wir zunächst den aus der Topologie stammenden Begriff des T_1 - oder Fréchet- Raumes.

Definition 4.4:

X sei eine kleine Menge, $P(X)$ ihre Potenzmenge.

Wir definieren:

a) Das Paar $(X, \underline{X})$, $\underline{X} \subset P(X)$ heißt Punktraum, wenn $\underline{X}$ folgende Axiome erfüllt:

P 1: $\emptyset, X \in \underline{X}$

P 2: $\underline{X}$ ist bezüglich beliebigen Durchschnitten abgeschlossen.

P 3: $\{x\} \in \underline{X}$ für alle $x \in X$.

b) $(X, \underline{X})$, $(Y, \underline{Y})$ seien Punkträume. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt

(*)

(*) Die Definition des Punktraumes ist im wesentlichen der Diplomarbeit von Peter Schrader (46) entnommen, die unter Anleitung von Herrn Prof. Dr. Baumann in Bochum entstand.

- (i) "stetig", wenn für $M \in \underline{Y}$ stets $f^{-1}(M) \in \underline{X}$ gilt.
- (ii) "abgeschlossen", wenn sie stetig ist und für $N \in \underline{X}$ stets $f(N) \in \underline{Y}$ gilt.
- (iii) "Homöomorphismus", wenn sie abgeschlossen und bijektiv ist.

Es ist klar, daß die Punkträume zusammen mit den stetigen Abbildungen als Homomorphismen eine Kategorie bilden. Sie sei im folgenden mit $\mathcal{P}$ bezeichnet.

Seien $\mathcal{A}$ die Kategorie der kleinen präadditiven Kategorien mit den additiven Funktoren als Homomorphismen und $C, D \in |\mathcal{A}|$.

Wir wollen additive Funktoren $F: C \rightarrow D$ auszeichnen, die mit den Verbandsstrukturen der Verbände der Torsionsklassen für C und D verträglich sind.

Definition 4.5:

$F: C \rightarrow D$ heißt T-Funktor, wenn gilt:

- (i) F erfüllt für alle $A_1, A_2 \in |C|$ folgende Bedingungen:

$$(a) \quad \underline{T}_{A_1} = \underline{T}_{A_2} \Rightarrow \underline{T} F(A_1) = F(A_2) \underline{T}$$

$$(b) \quad A_1 \leq \underline{T} A_2 \Leftrightarrow F(A_1) \leq \underline{T} F(A_2)$$

$$(c) \quad A_1 \leq \underline{F} A_2 \Leftrightarrow F(A_1) \leq \underline{F} F(A_2)$$

- (ii) Zu jeder minimalen Torsionsklasse $\underline{T}_{B_1}$ oder $\underline{T}_{B_2}$ für D existiert genau eine minimale Torsionsklasse $\underline{T}_{A_1}$ oder $\underline{T}_{A_2}$ für C mit $\underline{T}_{B_1} \subset \underline{T} F(A_1)$ oder $\underline{T}_{B_2} \subset F(A_2) \underline{T}$ und $\underline{T} F(A_1) \subset \underline{T} F(E)$ für alle $E \in |C|$ mit $\underline{T}_{B_1} \subset \underline{T} F(E)$ sowie $F(A_2) \underline{T} \subset F(E') \underline{T}$ für alle $E' \in |C|$ mit $\underline{T}_{B_2} \underline{T} \subset F(E') \underline{T}$.

Wir erhalten die

Proposition 4.6 : (Dualitätssatz)

Es existiert eine treue kontravariante Einbettung

$T: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$, die folgende Bedingungen erfüllt:

- (i) Der Verband der abgeschlossenen Mengen des Punktraumes $(X, \underline{X})$ ist zum Verband der Torsionsklassen für $T(X)$ isomorph.
- (ii) Seien $(X, \underline{X})$, $(Y, \underline{Y})$ Punkträume, dann entsprechen die surjektiven stetigen Abbildungen $f: X \longrightarrow Y$ und die T -Funktoren $F: T(X) \longrightarrow T(Y)$ einander eineindeutig.
- (iii) Seien $(X, \underline{X})$, $(Y, \underline{Y})$ Punkträume und $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung, dann gilt:
 - (a) Ist f surjektiv, dann ist $T(f)$ injektiv.
 - (b) Ist f abgeschlossen und injektiv, dann ist $T(f)$ surjektiv.

Beweis:

1. Sei $(X, \underline{X})$ ein Punktraum. Mit den Axiomen P 1 und P 2 folgt, daß $(\underline{X}, \subset)$ ein vollständiger Verband ist. Theorem 4.1 liefert daher zu $(\underline{X}, \subset)$ eine kleine präadditive Kategorie $T(X)$. $T(X)$ enthält alle Objekte der Form (M, N) mit $M, N \in \underline{X}$ und $M \not\subset N$.
2. Seien $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung und $(A, B) \in |T(Y)|$. Wir unterscheiden drei Fälle:
 1. Fall: $f^{-1}(A) \not\subset f^{-1}(B)$, dann sei $T(f)((A, B)) = (f^{-1}(A), f^{-1}(B))$.
 2. Fall: $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ und $f^{-1}(B) \neq X$, dann sei $T(f)((A, B)) = (X, f^{-1}(B))$.

3. Fall: $f^{-1}(B) = X$, dann sei $T(f)((A, B)) = (\emptyset, X)$.

Mit dem Beweis zu Lemma 3.1 folgt, daß
T in kanonischer Weise zu einem additiven
Funktor wird.

3. T ist treu:

Seien dazu $f \neq g : X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen.

Es existiert ein $x \in X$ mit $f(x) \neq g(x)$. Wir setzen
 $y := f(x)$. Angenommen, $g^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\{y\}) \Rightarrow$
 $x \in g^{-1}(\{y\}) \Rightarrow g(x) \in (g \circ g^{-1})(\{y\}) \subset \{y\}$
(q.e.a.). Es folgt: $T(f)((Y, \{y\})) \neq$
 $T(g)((Y, \{y\}))$.

ad (i) - Theorem 4.1 -

ad (ii):

4. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige surjektive Abbildung.

Für $(A, B) \in |T(Y)|$ folgt: $T(f)((A, B)) =$
 $(f^{-1}(A), f^{-1}(B))$. Man verifiziert jetzt sofort, daß
 $T(f) : T(Y) \rightarrow T(X)$ ein T-Funktor ist.

5. Sei $F: T(Y) \rightarrow T(X)$ ein T-Funktor.

Wir zeigen, daß eine stetige surjektive Abbildung
 $f: X \rightarrow Y$ existiert mit $T(f) = F$.

(ii) ist dann bewiesen.

Zu jedem Objekt $(B, \{x\}) \in |T(X)|$ existiert wegen
Definition 4.5 (ii) ein bis auf " $\sim_{\underline{F}}$ -Äquivalenz"
eindeutig bestimmtes Objekt $(A, \{y\}) \in |T(Y)|$
mit $(B, \{x\}) \leq_{\underline{F}} F(A, \{y\})$. Wir definieren $f: X \rightarrow Y$
durch $f(x) = y$.

Mit Hilfe von Bedingung (ii) (Definition 4.5)
verifiziert man sofort, daß f eine wohldefinierte
surjektive Abbildung ist.

6. Wir zeigen, daß f auch auf andere Weise gewonnen

werden kann.

Für $(\{x\}, B) \in |T(X)|$ sei $(\{y\}, A)$ das nach Definition 4.5 (ii) bis auf " $\sim_{\underline{T}}$ - Äquivalenz" eindeutig bestimmte Objekt aus $|T(Y)|$ mit

$(\{x\}, B) \leq_{\underline{T}} F(\{y\}, A)$, Wir definieren $f': X \rightarrow Y$ durch $f'(y) = x$ und zeigen $f = f'$.

- Sei dazu $(B, \{x\}) \leq_{\underline{F}} F(A, \{y\}) = (M, E)$ und $(\{x\}, B) \leq_{\underline{T}} F(\{y'\}, A') = (E', N)$.

Wir müssen zeigen: $E = E'$.

Nun gilt: $\underline{T}(\{y'\}, A') = (S, \{y'\}) \underline{T}$ für ein $S \in \underline{Y}$.
Mit Definition 4.5 (i) (a) und (ii) folgt hieraus:

$$\begin{aligned} (B, \{x\}) \underline{T} &= \underline{T}(\{x\}, B) \subset \underline{T} F(\{y'\}, A') = \\ \underline{T}(E', N) &= F(S, \{y'\}) \underline{T} = F(A, \{y\}) \underline{T} = (M, E) \underline{T} \Rightarrow \\ E &= E' \end{aligned}$$

7. f ist stetig. - Sei dazu $(N, M) \in |T(Y)|$ und

$F((N, M)) = (L, K)$. Es genügt zu zeigen: $f^{-1}(M) = K$.

Aus $x \in f^{-1}(M)$ folgt: $f(x) \in M \Rightarrow$

$(A, \{f(x)\}) \leq_{\underline{F}} (N, M)$ für ein $A \in \underline{Y} \Rightarrow$ (für ein $B \in \underline{X}$)

$$F((A, \{f(x)\})) = (B, f^{-1}(\{f(x)\})) \leq_{\underline{F}}$$

$$F((N, M)) = (L, K) \Rightarrow x \in K.$$

Umgekehrt folgt aus $x' \in K : (L, \{x'\}) \leq_{\underline{F}} F(N, M)$.

Wegen Definition 4.5 (ii) existiert ein Element

$$(E, \{y\}) \in |T(Y)| \text{ mit } (L, \{x'\}) \leq_{\underline{F}} F(E, \{y\}) \leq_{\underline{F}}$$

$$F(N, M) \Rightarrow (E, \{y\}) \leq_{\underline{F}} (N, M) \Rightarrow y \in M \Rightarrow$$

$$x' \in f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(M)$$

8. Mit Hilfe von (6) zeigt man durch einen analogen

Schluß: $f^{-1}(N) = L$, womit $F = T(f)$ folgt.

ad (iii):

a) - trivial -

b) - trivial -

Proposition 4.6 ist damit bewiesen.

Bemerkung:

Proposition 4.6 wurde durch die Absicht motiviert, mit Hilfe von Theorem 4.1 die zur Kategorie der T.-Räume duale Kategorie zu beschreiben.

Proposition 4.6 erhält ihre Bedeutung daher meiner Meinung nach durch Aussage (ii).

Man verifiziert nämlich sofort, daß die Kategorie der kleinen präadditiven Kategorien zusammen mit den T-Funktoren als Homomorphismen eine Unterkategorie von $\mathcal{A}$ bildet.

§ 5: Ein Isomorphiekriterium für Verbände von V-Klassen

Im folgenden seien (O, P) ; (O', P') Paare beliebiger Klassen mit Relationen $R \subset O \times P$ und $R' \subset O' \times P'$.

Wir nehmen an, daß sowohl die bezüglich R als auch die bezüglich R' definierten V-Klassen und V-freien Klassen für (O, P) bzw. (O', P') die unter 2.7 aufgeführten Bedingungen V1 und V2 dieser Arbeit erfüllen.

Wir erinnern daran, daß sowohl die Torsionsklassen und torsionsfreien Klassen für eine lokal kleine $\text{Ab } 3$ und $\text{Ab } 3^*$ Kategorie als auch die Klassen E-zusammenhängender und total E-unzusammenhängender topologischer Räume die Bedingungen V1 und V2 erfüllen.

Das in diesem Paragraphen entwickelte Isomorphiekriterium für die Verbände der V- Klassen für (O, P) bzw. (O', P') umfaßt daher insbesondere den Fall, daß O bzw. O' eine lokal kleine Ab 3 und Ab 3* Kategorie oder die Kategorie der topologischen Räume ist.

Wir benötigen noch folgende

Definition 5.1:

$(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ sei das System der V- Theorien für (O, P) ;

$(\mathfrak{V}', \mathfrak{V}')$ das System der V- Theorien für (O', P') .

Die Paare (O, P) ; (O', P') heißen V- homöomorph, wenn

Abbildungen $f: O \rightarrow O'$; $f': O' \rightarrow O$ und $g: P \rightarrow P'$,

$g': P' \rightarrow P$ existieren, die für beliebige $(\underline{T}, \underline{F}) \in (\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$,

$(\underline{T}', \underline{F}') \in (\mathfrak{V}', \mathfrak{V}')$ folgende Bedingungen erfüllen:

$$H 1: (f^{-1}(\underline{T}'), g^{-1}(\underline{F}')) \in (\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$$

$$(f'^{-1}(\underline{T}), g'^{-1}(\underline{F})) \in (\mathfrak{V}', \mathfrak{V}')$$

$$H 2: ((f'^{-1} \circ f^{-1})(\underline{T}'), (g'^{-1} \circ g^{-1})(\underline{F}')) = (\underline{T}', \underline{F}')$$

$$((f^{-1} \circ f'^{-1})(\underline{T}), (g^{-1} \circ g'^{-1})(\underline{F})) = (\underline{T}, \underline{F})$$

Seien $(\mathfrak{V}, \mathcal{C})$ der Verband der V- Klassen, $(\mathfrak{V}, \mathcal{C})$ der

Verband der V-freien Klassen für (O, P) und $(\mathfrak{V}', \mathcal{C})$ der

Verband der V- Klassen, $(\mathfrak{V}', \mathcal{C})$ der Verband der V-

freien Klassen für (O', P') ; - dann gilt:

Theorem 5.2:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Die Verbände $(\mathfrak{V}, \mathcal{C})$ und $(\mathfrak{V}', \mathcal{C})$ sind isomorph.

(ii) Die Paare (O, P) und (O', P') sind V-homöomorph.

(iii) Es existieren Abbildungen $f: O \rightarrow O'$; $f': O' \rightarrow O$,

$g: P \rightarrow P', g': P' \rightarrow P$, so daß für alle $M \in O$,
 $M' \in O', N \in P, N' \in P'$ gilt:

- (a) $M \sim_{\underline{T}} (f \circ f')(M); M' \sim_{\underline{T}} (f' \circ f)(M')$
 $N \sim_{\underline{F}} (g' \circ g)(N); N' \sim_{\underline{F}} (g \circ g')(N')$
- (b) $(M, N) \in R \Rightarrow (f(M), g(N)) \in R'$
 $(M', N') \in R' \Rightarrow (f'(M'), g'(N')) \in R$
- (iv) Es existieren Abbildungen $f: O \rightarrow O', g: P \rightarrow P'$,
so daß für $M \in O, N \in P$ gilt:
- (c) $\bigcup_{M \in O} [f(M)] \stackrel{\underline{T}}{=} O'; \bigcup_{N \in P} [g(N)] \stackrel{\underline{F}}{=} P'$
- (d) $(M, N) \in R \Leftrightarrow (f(M), g(N)) \in R'$

Bemerkung: (vgl. Einleitung)

Theorem 5.2 erfüllt die in der Einleitung an ein Isomorphiekriterium für Verbände von Torsionsklassen gestellten Mindestforderungen.

Es führt die Isomorphie der Verbände $(\tilde{J}, C)$ und $(\tilde{J}', C)$ auf Abbildungen zurück, die Klassen " $\sim_{\underline{T}}$ " bzw. " $\sim_{\underline{F}}$ " - äquivalenter Objekte von O bzw. P eindeutig auf Klassen " $\sim_{\underline{T}}$ " bzw. " $\sim_{\underline{F}}$ " - äquivalenter Objekte von O' bzw. P' und "orthogonale" Paare $(N, M) \in O \times P$ auf "orthogonale" Paare $(N', M') \in O' \times P'$ abbilden (Bedingungen (iii) und (iv) des Theorems).

Ein wesentlich über Theorem 5.2 hinausgehendes Kriterium ist selbst dann nicht zu erwarten, wenn man für (O, P) , (O', P') und R, R' weitere Voraussetzungen trifft.

So sind z.B. alle Verbände von Torsionsklassen für Modulkategorien über kommutativen lokalen perfekten Ringen untereinander isomorph. - Sie bestehen nur aus zwei Elementen (vgl. (52), Theorem 3 und (14)),

Proposition 12.13).

Kommutative lokale perfekte Ringe können jedoch sehr unterschiedliche Strukturen haben.-

Der Restklassenring $\mathbb{Z}|_{4\mathbb{Z}}$ der ganzen Zahlen und der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen sind kommutative lokale perfekte Ringe. - Es ist daher nicht zu erwarten, daß man die Isomorphie von Verbänden beliebiger Torsionsklassen für Modulkategorien selbst über kommutativen Ringen sinnvoll auf einen Äquivalenzbegriff zwischen den Ringstrukturen zurückführen kann.- Diese Tatsache war der Hauptgrund dafür, daß Theorem 5.2 in dieser abstrakten Form formuliert wurde. -

Beweis des Theorems:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Sei $\phi: (\mathcal{T}, \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{T}', \mathcal{C})$ der vorgegebene Verbandsisomorphismus. ϕ induziert durch $\underline{\mathbb{F}} \longrightarrow \underline{\mathbb{F}}'_{(\underline{\mathbb{F}} \underline{\mathbb{T}})}$ einen Verbandsisomorphismus $\phi': (\mathcal{T}, \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{T}', \mathcal{C})$. Wir zeigen zunächst, daß unter ϕ bzw. ϕ' einfach erzeugte V- Klassen bzw. einfach coerzeugte V- freie Klassen für $(0, P)$ auf einfach erzeugte V- Klassen bzw. einfach coerzeugte V- freie Klassen für $(0', P')$ abgebildet werden.

Aus Symmetriegründen genügt es, diese Behauptung für einfach erzeugte V- Klassen $\underline{\mathbb{T}}_M \in (\mathcal{T}, \mathcal{C})$ zu zeigen:

Sei $\phi(\underline{\mathbb{T}}_M) = \underline{\mathbb{T}}'$. Aus $\underline{\mathbb{T}}' = \bigvee_{K' \in \underline{\mathbb{T}}'} \underline{\mathbb{T}}'_{K'}$ folgt:

$$\underline{\mathbb{T}}_M = \bigvee_{K' \in \underline{\mathbb{T}}'} \phi^{-1}(\underline{\mathbb{T}}'_{K'}) \Rightarrow M \sim_{\underline{\mathbb{T}}} \bigcup \{ \phi^{-1}(\underline{\mathbb{T}}'_{K'}) \mid K' \in \underline{\mathbb{T}}' \}.$$

Wegen V 2 existiert eine Teilmenge $\underline{\mathbb{S}}' = \{ K'_i \in \underline{\mathbb{T}}' \mid i \in I \} \subset \underline{\mathbb{T}}'$ mit $\underline{\mathbb{T}}_M = \bigvee_{i \in I} \phi^{-1}(\underline{\mathbb{T}}'_{K'_i}) \Rightarrow \phi(\underline{\mathbb{T}}_M) = \bigvee_{i \in I} \underline{\mathbb{T}}'_{K'_i} = \underline{\mathbb{T}}_{\underline{\mathbb{S}}'}$.

Wegen V 1 existiert ein $M' \in O'$ mit $\underline{\mathbb{T}}_{\underline{\mathbb{S}}'} = \underline{\mathbb{T}}_{M'}$.

Insgesamt folgt: $\phi(\underline{T}_M) = \underline{T}_{M'}$.

Wir definieren die Abbildungen $f: O \longrightarrow O'$ durch

$$\underline{T}'_f(M) = \phi(\underline{T}_M) \text{ und } g: P \longrightarrow P' \text{ durch } g(N)\underline{F}' = \phi'(\underline{N}\underline{F}).$$

Analog definieren wir die Abbildungen $f': O' \longrightarrow O$

und $g': P' \longrightarrow P$. Wir überlassen dem Leser den einfachen

Nachweis dafür, daß die Abbildungen f, f' und g, g' eine

V-Homöomorphie zwischen den Paaren (O, P) und (O', P') definieren.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Zunächst folgt leicht - ohne Verwendung der Bedingungen

V1 und V2 - , daß unter f'^{-1} bzw. g'^{-1} einfach erzeugte

V- Klassen bzw. einfach coerzeugte V-freie Klassen

für (O, P) auf einfach erzeugte V- Klassen bzw. einfach

coerzeugte V-freie Klassen für (O', P') abgebildet werden.

Wir zeigen dies für den Fall einer einfach erzeugten

V- Klasse $\underline{T}_M$ für (O, P) .

$$\begin{aligned} \text{Sei } f'^{-1}(\underline{T}_M) &= \underline{T}' = \bigcup_{M' \in \underline{T}'} \{M'\} \Rightarrow f^{-1}(\underline{T}') = \\ \bigcup_{M' \in \underline{T}'} f^{-1}(\{M'\}) &= \underline{T}_M \Rightarrow M \in f^{-1}(\{M'\}) \text{ für ein} \\ M' \in \underline{T}' &\Rightarrow f'^{-1}(\underline{T}_M) = \underline{T}'_M = \underline{T}'_f(M) \quad (*) \end{aligned}$$

Für $\underline{T}_M \in (\mathcal{T}, C)$ folgt also:

$$\begin{aligned} (f'^{-1} \circ f'^{-1})(\underline{T}_M) &= f^{-1}(\underline{T}'_f(M)) = \underline{T}'_f(f \circ f)(M) = \\ \underline{T}_M &\Rightarrow M \sim_{\underline{T}} (f \circ f)(M) \end{aligned}$$

Die restlichen Bedingungen für (iii) (a) folgen analog.

Seien nun $(M, N) \in R$ für $(M, N) \in O \times P \Rightarrow$

$(M, N) \in (\underline{T}_M, \underline{F}_M)$. Mit H2 und (*) folgt:

$$(f(M), g(N)) \in (f'^{-1}(\underline{T}_M), g'^{-1}(\underline{F}_M)) \Rightarrow (f(M), g(N)) \in R'.$$

Analog zeigt man, daß aus $(M', N') \in R'$ für $(M', N') \in O' \times P'$

stets $(f'(M'), g'(N')) \in R$ folgt.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) - trivial -

(iv) $\Rightarrow$ (i)

Wir definieren $\phi: (\mathcal{T}, \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{T}', \mathcal{C})$ durch $\phi(\underline{T}) = \bigcup_{M \in \underline{T}} [f(M)]_{\underline{T}}$.

ϕ ist wohldefiniert. Wir müssen dazu zeigen, daß

$\phi(\underline{T})$ eine V-Klasse für (O', P') ist.

Sei $(M', N') \in R'$ für alle $N' \in \underline{F}'\phi(\underline{T})$. Es ist zu zeigen, daß $M' \in \phi(\underline{T})$ gilt. Zunächst folgt: $(M', g(N)) \in R$ für alle $N \in \underline{F}_{\underline{T}}$. Wegen Bedingung (iv)(a) existiert ein $M \in O$ mit $f(M) \sim_{\underline{T}} M' \Rightarrow (f(M), g(N)) \in R' \Rightarrow (M, N) \in R \Rightarrow M \in \underline{T} \Rightarrow f(M) \in \phi(\underline{T}) \Rightarrow M' \in \phi(\underline{T})$.

Es ist nun leicht nachzuprüfen, daß ϕ ein Verbandsisomorphismus zwischen den Verbänden $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ und $(\mathcal{T}', \mathcal{C})$ ist. Wir überlassen diesen Nachweis dem Leser.

5.3: Der Verband der hereditären Torsionsklassen für eine Modulkategorie Mod-R

R, S seien assoziative Ringe mit Einselement und Mod-R bzw. Mod-S die Kategorien der R - bzw. S -Rechtsmoduln.

- (*) Wir betrachten die Verbände $(\mathcal{T}_H, \mathcal{C})$ und $(\mathcal{T}'_H, \mathcal{C})$ der hereditären Torsionsklassen für Mod-R bzw. Mod-S (vgl. Beispiel 2.2.1. a).

(*) Hereditäre Torsionsklassen für Modulkategorien sind von entscheidender Bedeutung innerhalb der allgemeinen Lokalisationstheorie für Modulkategorien über nicht-kommutativen Ringen.

Wir wollen aus Bedingung (iv) von Theorem 5.2 ein Kriterium ableiten, das angibt, wann die Verbände $(\mathfrak{J}_H, \subset)$ und $(\mathfrak{J}'_H, \subset)$ isomorph sind.

Dazu halten wir zunächst fest, daß sich die hereditären Torsionsklassen für Mod-R (Mod-S) als V-Klassen für $(|\text{Mod-R}|, |\text{Mod-R}|)$ bzw. $(|\text{Mod-S}|, |\text{Mod-S}|)$ auffassen lassen.

Für Mod-R betrachte man etwa die Relation $H \subset |\text{Mod-R}| \times |\text{Mod-R}|$ mit $(M_R, N_R) \in H \Leftrightarrow \text{Hom}_R(M_R, E(N_R)) = \{\emptyset\}$.

(*) Man verifiziert sofort, daß die hereditären Torsionsklassen und hereditären torsionsfreien Klassen für Mod-R (Mod-S) die Bedingungen V1 und V2 erfüllen.

Um Verwechslungen zu vermeiden, treffen wir folgende Vereinbarung: - Die Zeichen " $\leq_{\mathbb{T}}$ " und " $\leq_{\mathbb{F}}$ " bzw. " $\sim_{\mathbb{T}}$ " und " $\sim_{\mathbb{F}}$ " werden im folgenden stets bezüglich (allgemeiner) Torsionsklassen (torsionsfreier Klassen) für Mod-R (Mod-S) benutzt.

(*) Die Bedingungen V1 und V2 werden im Beweis zu Theorem 5.2 gebraucht, um sicherzustellen, daß der Verbandsisomorphismus $\phi: (\mathfrak{J}, \subset) \rightarrow (\mathfrak{J}', \subset)$ einfach erzeugte und einfach coerzeugte V-Klassen für (O, P) auf einfach erzeugte bzw. einfach coerzeugte V-Klassen für (O', P') abbildet. Ist ϕ ein Verbandsisomorphismus zwischen Verbänden hereditärer Torsionsklassen für Modulkategorien, erübrigt sich dieser Nachweis, da hereditäre Torsionsklassen für Modulkategorien ohnehin sowohl einfach erzeugt als auch einfach coerzeugt sind (vgl. Beispiel 2.2.1 a).

Es ist bekannt, daß zwei Moduln M_R , N_R genau dann die gleiche hereditäre Torsionsklasse für Mod-R coerzeugen, wenn $E(M_R) \sim_{\underline{F}} E(N_R)$ gilt.

Ein Kriterium, das angibt, wann zwei Moduln M_R , N_R die gleiche hereditäre Torsionsklasse für Mod-R erzeugen, scheint zu fehlen. Im Hinblick auf Bedingung (iv) von Theorem 5.3 erscheint ein solches Kriterium jedoch als wichtig. - Wir geben daher ein Kriterium an! -

Zunächst treffen wir folgende Vereinbarung: - Für einen Modul M_R bezeichne $C(M_R)$ die direkte Summe der nicht-isomorphen zyklischen Untermoduln von $M_R^{(\mathbb{N})}$. Wir erhalten die

Proposition 5.4:

Die Moduln M_R , N_R erzeugen genau dann die gleiche hereditäre Torsionsklasse für Mod-R, wenn

$C(M_R) \sim_{\underline{T}} C(N_R)$ gilt.

Beweis:

Es genügt zu zeigen, daß die von $C(M_R)$ erzeugte (allgemeine) Torsionsklasse für Mod-R hereditär ist.

Dazu benutzen wir folgendes Kriterium, das sich leicht aus (48), Proposition 2.9 gewinnen läßt:

"Der Modul N_R erzeugt genau dann eine hereditäre Torsionsklasse für Mod-R, wenn $L_R \leq_{\underline{T}} N_R$ für alle Untermoduln $L_R \subset N_R$ gilt."

Sei $L_R \subset C(M_R)$ ein Untermodul. Zu $x \in L_R$ existieren endlich viele zyklische Untermoduln $x_i R \subset M_R^{(\mathbb{N})}$

$(1 \leq i \leq n)$ mit $xR \subset \bigoplus_{i=1}^n x_i R \subset M_R^{(\mathbb{N})}$.

Mit der Definition von $C(M_R)$ folgt, daß xR zu einem direkten Summanden von $C(M_R)$ isomorph ist. Da $x \in I_R$ beliebig gewählt war, folgt, daß I_R von $C(M_R)$ erzeugt wird. Hieraus folgt die gewünschte Behauptung.

Zusammen mit Theorem 5.2 folgt aus Proposition 5.4 das

Korollar 5.5:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) Die Verbände $(\mathcal{I}_H, \subset)$ und $(\mathcal{I}'_H, \subset)$ sind isomorph.
- (ii) Es existieren Abbildungen $f, g: |\text{Mod-}R| \rightarrow |\text{Mod-}S|$, die folgende Bedingungen erfüllen:
- (a) $\bigcup \{C(f(M_R))\}$ erzeugt Mod-S als (allgemeine) Torsionsklasse, während $\bigcup \{E(g(M_R))\}$ Mod-S als (allgemeine) torsionsfreie Klasse coerzeugt.
- (b) Jede der äquivalenten Bedingungen:
- $$\text{Hom}_R(M_R, E(N_R)) = \{\sigma\} \Leftrightarrow$$
- $$\text{Hom}_R(C(M_R), N_R) = \{\sigma\} \Leftrightarrow$$
- $$\text{Hom}_R(C(M_R), E(N_R)) = \{\sigma\} \text{ ist äquivalent}$$
- zu jeder der äquivalenten Bedingungen
- $$\text{Hom}_S(f(M_R), E(g(N_R))) = \{\sigma\} \Leftrightarrow$$
- $$\text{Hom}_S(C(f(M_R)), g(N_R)) = \{\sigma\} \Leftrightarrow$$
- $$\text{Hom}_S(C(f(M_R)), E(g(N_R))) = \{\sigma\}$$

5.6: Drei Probleme im Zusammenhang mit Theorem 5.2

5.6.1:

Theorem 5.2 wurde für Paare von Klassen (O, P) bzw. (O', P') formuliert. Gilt $O = P$ und $O' = P'$, dann liegt es nahe zu versuchen, in den Bedingungen (iii) und (iv) des Theorems

die Abbildungen $f, g: O \rightarrow O'$ und $f', g': O' \rightarrow O$ durch je eine Abbildung $F: O \rightarrow O'$ und $F': O' \rightarrow O$ zu ersetzen. Die Bedingungen (iii) und (iv) des Theorems hätten dann folgendes Aussehen:

(iii) Es existieren Abbildungen $F: O \rightarrow O'$ und $F': O' \rightarrow O$, so daß für alle $M, N \in O, M', N' \in O'$ gilt:

$$(a) \quad M \sim_{\underline{T}} (F' \cdot F)(M), \quad M' \sim_{\underline{T}} (F \cdot F')(M')$$

$$M \sim_{\underline{F}} (F' \cdot F)(M), \quad M' \sim_{\underline{F}} (F \cdot F')(M')$$

$$(b) \quad (M, N) \in R \quad \Rightarrow \quad (F(M), F(N)) \in R'$$

$$(M', N') \in R' \quad \Rightarrow \quad (F'(M'), F'(N')) \in R$$

(iv) Es existiert eine Abbildung $F: O \rightarrow O'$, so daß für $M, N \in O$ gilt:

$$(c) \quad \bigcup_{M \in O} [F(M)]_{\underline{T}} = O'; \quad \bigcup_{M \in O} [F(M)]_{\underline{F}} = O'$$

$$(d) \quad (M, N) \in R \quad \Leftrightarrow \quad (F(M), F(N)) \in R'$$

Man kann leicht beweisen, daß sich die Abbildungen $f, g: O \rightarrow O', f', g': O' \rightarrow O$ genau dann durch Abbildungen $F: O \rightarrow O', F': O' \rightarrow O$ ersetzen lassen, wenn für alle $M, N \in O$ folgende Bedingung erfüllt ist:

$$[M]_{\underline{T}} \cap [N]_{\underline{F}} \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad [f(M)]_{\underline{T}} \cap [g(N)]_{\underline{F}} \neq \emptyset$$

In welchen Fällen diese Bedingung verifizierbar ist, konnte ich bisher nicht beweisen!

5.6.2:

R, S seien assoziative Ringe mit Einselement, $\text{Mod-}R, \text{Mod-}S$ die Kategorien der R - bzw. S -Rechtsmoduln. Weiter seien $(\mathcal{T}_H, \subset), (\mathcal{T}'_H, \subset)$ und $(\mathcal{T}, \subset), (\mathcal{T}', \subset)$ die Verbände der hereditären bzw. (allgemeinen) Torsionsklassen für $\text{Mod-}R$ bzw. $\text{Mod-}S$.

Es stellt sich folgendes Problem: - Gilt stets: -

$$(\mathcal{T}_H, \mathcal{C}) \cong (\mathcal{T}'_H, \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{T}, \mathcal{C}) \cong (\mathcal{T}', \mathcal{C}) ?$$

Wir können dieses Problem nur teilweise lösen:

Die Implikation: $(\mathcal{T}_H, \mathcal{C}) \cong (\mathcal{T}'_H, \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{T}, \mathcal{C}) \cong (\mathcal{T}', \mathcal{C})$ gilt i.a. nicht.

Sei dazu R ein beliebiger linksperfekter Ring, der sich nicht als direkte Summe von Matrizenringen über lokalen links- und rechtsperfekten Ringen darstellen läßt (Stenström (49) gibt in Übungsaufgabe 20 zu chapter viii einen solchen Ring an). Aus (52) Theorem 3 folgt, daß $\text{Mod-}R$ mindestens eine nicht-hereditäre Torsionsklasse besitzt. Da R linksperfekt ist, ist der Verband $(\mathcal{T}_H, \mathcal{C})$ der hereditären Torsionsklassen für $\text{Mod-}R$ endlich. Das Jacobson-Radikal " J " von R ist links-T-nilpotent. Mit (12) Korollar 2.6 folgt daher, daß $(\mathcal{T}_H, \mathcal{C})$ zu $(\mathcal{T}'_H, \mathcal{C})$ - dem Verband der hereditären Torsionsklassen für $\text{Mod-}R|_J$ - isomorph ist. $R|_J$ ist ein halbeinfacher (artinscher) Ring. $\text{Mod-}R|_J$ besitzt also nur hereditäre Torsionsklassen. Wegen der Endlichkeit von $(\mathcal{T}_H, \mathcal{C})$ folgt, daß die Verbände $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ und $(\mathcal{T}', \mathcal{C}) = (\mathcal{T}'_H, \mathcal{C})$ der (allgemeinen) Torsionsklassen für $\text{Mod-}R$ bzw. $\text{Mod-}R|_J$ nicht isomorph sind.

Es ist mir nicht bekannt, ob die Implikation

$$(\mathcal{T}, \mathcal{C}) \cong (\mathcal{T}', \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{T}_H, \mathcal{C}) \cong (\mathcal{T}'_H, \mathcal{C}) \text{ gilt!}$$

5.6.3:

(O, P) sei ein Paar von Klassen, $R \subset O \times P$ eine Relation.

Wir betrachten die Relation $R' := (O \times P) \setminus R$. Sei $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$

der Verband der bezüglich R definierten und $(\mathcal{T}', \mathcal{C})$ der

Verband der bezüglich R' definierten V - Klassen für (O, P) .

Wir fragen danach, wann $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ zu $(\mathcal{T}', \mathcal{C})$ antiisomorph ist.

Dazu zunächst folgende

Proposition 5.7:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) Es existiert eine Antiisomorphie $\phi: (\mathcal{T}, \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{T}', \mathcal{C})$, die einfach erzeugte V-Klassen von $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ auf einfach erzeugte V-Klassen von $(\mathcal{T}', \mathcal{C})$ abbildet.
- (ii) Die V-Klassen von $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ und $(\mathcal{T}', \mathcal{C})$ lassen sich als Durchschnitte einfach erzeugter V-Klassen von $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ bzw. $(\mathcal{T}', \mathcal{C})$ darstellen.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Aus Symmetriegründen genügt es zu zeigen, daß sich für $\underline{T} \in (\mathcal{T}, \mathcal{C})$ $\phi(\underline{T})$ als Durchschnitt einfach erzeugter V-Klassen von $(\mathcal{T}', \mathcal{C})$ darstellen läßt.

Aus $\underline{T} = \bigvee_{M \in \underline{T}} \underline{T}_M$ folgt: $\phi(\underline{T}) = \bigwedge_{M \in \underline{T}} \phi(\underline{T}_M) = \bigcap_{M \in \underline{T}} \phi(\underline{T}_M)$, womit (ii) bereits bewiesen ist.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Wir definieren $\phi: (\mathcal{T}, \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{T}', \mathcal{C})$ durch $\phi(\underline{T}) = \bigcap_{M \in \underline{T}} \underline{T}'_M$ und $\psi: (\mathcal{T}', \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{T}, \mathcal{C})$ durch $\psi(\underline{T}') = \bigcap_{M' \in \underline{T}'} \underline{T}_M$.

Wir zeigen zunächst, daß die Abbildungen ϕ und ψ zueinander invers sind. Dazu genügt es aus Symmetriegründen zu zeigen, daß für $\underline{T} \in (\mathcal{T}, \mathcal{C})$ $(\psi \circ \phi)(\underline{T}) = \underline{T}$ gilt.

Sei $\underline{T} = \bigcap_{S \in \underline{S}} \underline{T}_S$ für eine Teilklasse $\underline{S} \subset \mathcal{O}$.

Wir müssen zeigen: $\underline{T}_1 = \underline{T} := \bigcap_{M' \in \phi(\underline{T}_1)} \underline{T}_{M'} =: \underline{T}_2$

1. Sei $N \in \underline{T}_1 \Rightarrow \underline{T}_N \subset \underline{T}_1 \Rightarrow \phi(\underline{T}_1) = \bigcap_{M \in \underline{T}_1} \underline{T}'_M \subset \underline{T}'_N = \phi(\underline{T}_N) \Rightarrow \underline{T}'_M \subset \underline{T}'_N$ für alle $M' \in \phi(\underline{T}_1) \Rightarrow \psi(\underline{T}'_N) = \underline{T}_N \subset \psi(\underline{T}'_M) = \underline{T}_M$ für alle $M' \in \phi(\underline{T}_1) \Rightarrow N \in \underline{T}_N \subset \bigcap_{M' \in \phi(\underline{T}_1)} \underline{T}_{M'} = \underline{T}_2$.

2. Um $\underline{T}_2 \subset \underline{T}_1$ zu zeigen, genügt es, die Inklusion $\underline{S} \subset \phi(\underline{T}_1)$ zu verifizieren. Sei $S \in \underline{S} \Rightarrow \underline{T}_1 \subset \underline{T}_S \Rightarrow \underline{T}'_S = \phi(\underline{T}_S) \subset \phi(\underline{T}_1) \Rightarrow S \in \phi(\underline{T}_1)$.

Es bleibt zu zeigen, daß ϕ und ψ Verbandsantihomomorphismen sind. Wir zeigen dies für ϕ .

Sei $\bigvee_{i \in I} \underline{T}_i = \underline{T} = \bigcap_{k \in K} \underline{T}_k$. Wir müssen die Gleichungen $\bigcap_{i \in I} \phi(\underline{T}_i) = \phi(\underline{T}) = \bigvee_{k \in K} \phi(\underline{T}_k)$ verifizieren.

1. $\bigcap_{i \in I} \phi(\underline{T}_i) = \phi(\underline{T})$

Aus $\underline{T}_i \subset \underline{T}$ für alle $i \in I$ folgt:

$$\phi(\underline{T}) \subset \bigcap_{i \in I} \phi(\underline{T}_i).$$

Sei nun $N \in \bigcap_{i \in I} \phi(\underline{T}_i) \Rightarrow \underline{T}'_N \subset \phi(\underline{T}_i)$ für alle $i \in I$

$\Rightarrow (\psi \circ \phi)(\underline{T}_i) = \underline{T}_i \subset \psi(\underline{T}'_N) = \underline{T}_N$ für alle $i \in I \Rightarrow$

$$\bigvee_{i \in I} \underline{T}_i = \underline{T} \subset \underline{T}_N \Rightarrow \phi(\underline{T}_N) = \underline{T}'_N \subset \phi(\underline{T}).$$

Die Gleichheit von $\phi(\underline{T})$ und $\bigvee_{k \in K} \phi(\underline{T}_k)$ folgt analog.

Die Proposition ist bewiesen.

.

.

Proposition 5.7 läßt die Frage offen, ob stets eine Antiisomorphie zwischen $(\mathfrak{J}, \subset)$ und $(\mathfrak{J}', \subset)$ existiert!

- Sei $\mathbb{Z}$ der Ring der ganzen Zahlen, "R" die die Torsionsklassen für Mod- $\mathbb{Z}$ definierende Relation auf Mod- $\mathbb{Z}$.

Wir nennen die bezüglich "R'" definierten V- Klassen für $(|\text{Mod-}\mathbb{Z}|, |\text{Mod-}\mathbb{Z}|)$ im folgenden Anti-Torsionsklassen für Mod- $\mathbb{Z}$.

Angenommen, es existiert eine Antiisomorphie zwischen dem Verband der Torsionsklassen und dem Verband der Anti-Torsionsklassen für Mod- $\mathbb{Z}$, die einfach erzeugte Torsionsklassen für Mod- $\mathbb{Z}$ auf einfach erzeugte Anti-Torsionsklassen für Mod- $\mathbb{Z}$ abbildet. Mod- $\mathbb{Z}$ besitzt eine eindeutig bestimmte maximale (allgemeine) Torsionsklasse, nämlich die von $\mathbb{Z}$ coerzeugte " $\mathbb{Z} \underline{\equiv}$ ", die alle echten Torsionsklassen für Mod- $\mathbb{Z}$ enthält (vgl. §7 dieser Arbeit). Da die minimalen Anti-Torsionsklassen für Mod- $\mathbb{Z}$ einfach erzeugt sind (Proposition 2.4), würde aus unserer Annahme folgen, daß $\mathbb{Z} \underline{\equiv}$ einfach erzeugt ist.

$\mathbb{Z} \underline{\equiv}$ besteht aus den abelschen Gruppen, die keinen freien direkten Summanden besitzen. $\mathbb{Z} \underline{\equiv}$ ist also genau dann einfach erzeugt, wenn eine abelsche Gruppe A existiert, die keinen freien direkten Summanden enthält, so daß für alle abelschen Gruppen T, die keinen freien direkten Summanden besitzen, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, T) \neq \{0\}$ gilt.

Ob eine solche Gruppe existiert, ist mir unbekannt!

Kapitel III: Der Verband der Torsionsklassen für eine Modulkategorie

R bezeichne in diesem Kapitel stets einen assoziativen Ring mit Einselement, $(\mathcal{T}_H, \mathcal{C})$ den Verband der hereditären und $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ den Verband der (allgemeinen) Torsionsklassen für $\text{Mod-}R$.

In § 6 dieser Arbeit werden die Atome (minimalen Torsionsklassen) von $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ charakterisiert. Als interessantestes Ergebnis beweisen wir, daß die Atome von $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ durch bestimmte nicht-triviale Untermoduln der injektiven Hüllen einfacher R - Rechtsmoduln erzeugt werden (Proposition 6.3). Dieses Ergebnis erscheint bemerkenswert, da wohlbekannt ist, daß die Atome von $(\mathcal{T}_H, \mathcal{C})$ durch die einfachen R - Rechtsmoduln erzeugt werden.

§ 7 - Über die Cokerne (maximalen Torsionsklassen) von $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ - lehnt sich an die Darstellungen von Beachy (3), (4), Golan ((14), § 13) und Lambek ((29), § 2) an.

Diese Arbeiten behandeln jedoch stets hereditäre Torsionsklassen für $\text{Mod-}R$. Daher wird in § 7 besonderer Wert auf den Vergleich zwischen den Coatomen von $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ und den Coatomen von $(\mathcal{T}_H, \mathcal{C})$ gelegt.

In § 8 dieser Arbeit werden einige Ringe durch den Verband der (allgemeinen) Torsionsklassen ihrer Modulkategorien $(\text{Mod-}R)$ charakterisiert. Man vergleiche hierzu die Propositionen 12.6 und 12.13 von (14), wo Ringe durch den Verband der hereditären Torsionsklassen ihrer Modulkategorien $(\text{Mod-}R)$ charakterisiert werden.

Bemerkung:

In diesem Kapitel wird der von Lambek ((29), §2) entwickelte Begriff des Torsionsuntermoduls (Torsionsideals) bezüglich beliebiger und nicht nur bezüglich hereditärer Torsionsklassen für $\text{Mod-}R$ entwickelt. Um Mißverständnissen vorzubeugen, werden Torsionsuntermoduln (Torsionsideale) im Sinne von Lambek stets "hereditäre Torsionsuntermoduln (Torsionsideale)" genannt.

§ 6: Die Atome von $(\mathcal{T}, \subset)$

Definition 6.1:

$N_R \subset M_R$ seien R - Rechtsmoduln. N_R heißt Torsionsuntermodul von M_R , wenn eine Torsionsklasse $\underline{T}$ für $\text{Mod-}R$ existiert, so daß N_R der größte zu $\underline{T}$ gehörende Untermodul von M_R ist.

Bemerkung:

Die Torsionsuntermoduln von R sind (zweiseitige) Ideale und werden im folgenden Torsionsideale genannt.

Der Beweis des folgenden Lemmas ist trivial und daher dem Leser überlassen.

Lemma 6.2: (vgl. (29), Proposition 2.1)

$N_R \subset M_R$ seien R - Rechtsmoduln. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) N_R ist ein Torsionsuntermodul von M_R .

(ii) $\text{Hom}_R(N_R, M_R|_{N_R}) = \{0\}.$

.

.

Im folgenden sei E_R ein fest gewählter Cogenerator für $\text{Mod-}R$. Weiter bezeichne $\{S_i\}_{i \in I}$ die Familie der nicht-isomorphen einfachen R -Rechtsmoduln.

Proposition 6.3: (Charakterisierung der Atome von $(\mathcal{T}, \subset)$)

Folgende R -Rechtsmoduln und Teilklassen von $\text{Mod-}R$ entsprechen einander eineindeutig:

- (i) Atome von $(\mathcal{T}, \subset)$.
- (ii) Torsionsuntermoduln $\{\mathcal{O}\} \neq M_R$ von E_R mit $\mathbb{T}_{M_R} \cap \mathbb{T}_{K_R} = \{\mathcal{O}\}$ für alle Torsionsuntermoduln $K_R \subsetneq M_R$ von M_R .
- (iii) Klassen $[N_R]$ nicht-trivialer " $\sim_{\mathbb{T}}$ -äquivalenter" Torsionsuntermoduln der injektiven R -Rechtsmoduln $E(S_i)$ mit
 - (a) $\text{Hom}_R(N_R|_{F_R}, N_R) \neq \{\mathcal{O}\}$ für alle Untermoduln $F_R \subsetneq N_R$ und
 - (b) $\mathbb{T}_{N_R} \cap \mathbb{T}_{K_R} = \{\mathcal{O}\}$ für alle Torsionsuntermoduln $K_R \subsetneq N_R$ von N_R .

Beweis:

(i) $\longrightarrow$ (ii)

Sei $\mathbb{T}$ ein Atom von $(\mathcal{T}, \subset)$. Wir betrachten den zu $\mathbb{T}$ gehörenden Torsionsuntermodul $\{\mathcal{O}\} \neq N_R \subset E_R$. N_R ist eindeutig bestimmt. Darüberhinaus folgt wegen der Minimalität von $\mathbb{T}$; $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{N_R}$.

Sei $K_R \subsetneq N_R$ ein Torsionsuntermodul von N_R . Angenommen,

$$\mathbb{T}_{K_R} \cap \mathbb{T}_{N_R} \neq \{\mathcal{O}\} \Rightarrow \mathbb{T}_{K_R} = \mathbb{T}_{N_R} \Rightarrow K_R = N_R \text{ (q.e.a.)}$$

(ii) $\longrightarrow$ (i)

Sei $\{\mathcal{O}\} \neq M_R$ ein Torsionsuntermodul von E_R , der die unter (ii) aufgeführte Bedingung erfüllt. Angenommen, es existiert eine Torsionsklasse $\{\mathcal{O}\} \neq \underline{T} \subset \underline{T}_{M_R}$. O.E. habe $\underline{T}$ die Form $\underline{T}_{L_R}$ für einen R -Rechtsmodul L_R . Wegen $\text{Hom}_R(L_R, E_R) \neq \{\mathcal{O}\}$ besitzt E_R einen zu $\underline{T}$ gehörenden Torsionsuntermodul $\{\mathcal{O}\} \neq K_R$. Aus $\underline{T} \subset \underline{T}_{M_R}$ folgt:

$K_R \subset M_R$. K_R ist daher der zu $\underline{T}$ gehörende Torsionsuntermodul von M_R . Mit (ii) folgt: $K_R = M_R \Rightarrow \underline{T} = \underline{T}_{M_R}$.

(i) $\longrightarrow$ (iii)

Diese Entsprechung ist ebenso trivial wie die Entsprechung (i) $\longrightarrow$ (ii). Sie folgt aus der Tatsache, daß $\prod_{i \in I} E(S_i)$ ein Cogenerator für $\text{Mod-}R$ ist.

(iii) $\longrightarrow$ (i)

Angenommen ein Torsionsuntermodul $N_R \subset E(S_j)$ ($j \in I$) erfüllt die Bedingungen (a) und (b) von (iii). Es genügt zu zeigen, daß $\underline{T}_{N_R}$ eine minimale Torsionsklasse für $\text{Mod-}R$ ist.

Sei $\{\mathcal{O}\} \neq \underline{T}_{L_R} \subset \underline{T}_{N_R}$ für eine o.E. einfach erzeugte Torsionsklasse für $\text{Mod-}R$. Da $\prod_{i \in I} E(S_i)$ ein Cogenerator für $\text{Mod-}R$ ist, können wir o.E. annehmen, daß $L_R \subset E(S_k)$ gilt für ein $k \in I$. Wegen $\underline{T}_{L_R} \subset \underline{T}_{N_R}$ folgt: $\text{Hom}_R(N_R, L_R) \neq \{\mathcal{O}\}$. Sei $\mathcal{O} \neq \downarrow \in \text{Hom}_R(N_R, L_R)$. Mit (a) folgt: $\text{Hom}_R(\text{Im } \downarrow, N_R) \neq \{\mathcal{O}\}$.

Wir betrachten das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \text{Im } \downarrow & \longrightarrow & L_R \text{ (Inklusion)} \\ \downarrow & \swarrow & \\ E(S_j) & & \end{array}$$

Es folgt: $\text{Hom}_R(L_R, E(S_j)) \neq \{\mathcal{O}\}$. Wegen $\underline{T}_{L_R} \subset \underline{T}_{N_R}$ ist der zu $\underline{T}_{L_R}$ gehörende Torsionsuntermodul $K_R \subset E(S_j)$ in N_R ent-

halten. K_R ist daher auch Torsionsuntermodul von N_R .

Mit (b) folgt hieraus: $K_R = N_R \Rightarrow \underline{T}_{L_R} = \underline{T}_{N_R}$,
was noch zu zeigen war.

Korollar 6.4:

Die Atome von $(\mathcal{J}, \subset)$ bilden eine kleine Menge.

Proposition 6.3 liefert sofort ein Kriterium dafür, wann jede nicht-triviale Torsionsklasse $\underline{T}'$ für $\text{Mod-}R$ eine minimale Torsionsklasse $\underline{T}$ für $\text{Mod-}R$ enthält. Die Formulierung dieses Kriteriums sei dem Leser überlassen.

Wir wollen lediglich festhalten, wann $\text{Mod-}R$ eine eindeutig bestimmte, in jeder nicht-trivialen Torsionsklasse für $\text{Mod-}R$ enthaltene, minimale Torsionsklasse $\underline{T}$ besitzt. Dies geschieht in

Korollar 6.5:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) Es existiert eine Torsionsklasse $\{\emptyset\} \neq \underline{T} \in (\mathcal{J}, \subset)$ mit $\underline{T} \subset \underline{T}'$ für alle $\{\emptyset\} \neq \underline{T}' \in (\mathcal{J}, \subset)$.
- (ii) E_R enthält einen nicht-trivialen Torsionsuntermodul N_R , der folgende Bedingungen erfüllt:
 - (a) N_R ist in allen nicht-trivialen Torsionsuntermoduln von E_R enthalten.
 - (b) $N_R \leq \underline{T} M_R$ für alle Torsionsuntermoduln $N_R \subset M_R \subset E_R$.
- (iii) Es existiert bis auf Isomorphie genau ein einfacher R -Rechtsmodul S_R . Darüberhinaus enthält $E(S_R)$ einen

nicht-trivialen Torsionsuntermoduln L_R , der die den Bedingungen (a) und (b) von (ii) entsprechenden Bedingungen erfüllt.

.

.

6.6: Beispiele:

6.6.1: Torsionsuntermoduln

$N_R \subset M_R$ seien R -Rechtsmoduln, N_R ein Torsionsuntermodul von M_R . T_{N_R} ist die kleinste und $M_R|_{N_R} T$ die größte Torsionsklasse für $\text{Mod-}R$, bezüglich der N_R Torsionsuntermodul von M_R ist.

Es existiert also genau dann eine eindeutig bestimmte Torsionsklasse für $\text{Mod-}R$, bezüglich der N_R Torsionsuntermodul von M_R ist, wenn $T_{N_R} = M_R|_{N_R} T$ gilt.

Auf die Beziehungen zwischen den Torsionsuntermoduln und den hereditären Torsionsuntermoduln eines Moduls M_R gehen wir im nächsten Paragraphen näher ein.

6.6.2: Ringe, über denen alle nicht-trivialen Torsionsklassen für $\text{Mod-}R$ Atome von $(\mathfrak{J}, \subset)$ enthalten

6.6.2.1: Rechts-Nakayama Ringe

R heißt rechts-Nakayama Ring, wenn alle nicht-trivialen R -Rechtsmoduln maximale Untermoduln enthalten.

Unmittelbar aus dieser Definition folgt die

Proposition 6.7:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) R ist ein rechts-Nakayama Ring.

- (ii) Jede nicht-triviale Torsionsklasse $\underline{T} \in (\mathcal{T}, \mathcal{C})$ enthält ein von einem einfachen R-Rechtsmodul erzeugtes Atom von $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$.

6.6.6.2: Rechtshereditäre Ringe R, über denen alle von einem einfachen R-Rechtsmodul erzeugten Torsionsklassen für Mod-R stabil sind (vgl. (49), chapter vi und vii)

Proposition 6.8:

R sei ein rechtshereditärer Ring, über dem alle von einem einfachen R-Rechtsmodul erzeugten Torsionsklassen für Mod-R stabil sind. Es gilt:

- (i) Jede nicht-triviale Torsionsklasse $\underline{T} \in (\mathcal{T}, \mathcal{C})$ enthält ein Atom von $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$.
 (ii) Die Atome von $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ werden von den injektiven Hüllen der einfachen R-Rechtsmoduln erzeugt.

Beweis:

Da $\bigcap_{i \in I} E(S_i)$ ein Cogenerator für Mod-R ist, genügt es wegen Proposition 6.3 (iii) für einen einfachen R-Rechtsmodul S_R zu zeigen:

1. $\text{Hom}_R(E(S_R) | K_R, E(S_R)) \neq \{0\}$ für alle Untermoduln $K_R \subsetneq E(S_R)$.
2. $E(S_R)$ besitzt keine echten nicht-trivialen Torsionsuntermoduln.

ad 1:

Sei $K_R \subsetneq E(S_R)$ ein Untermodul. Da $\bigcap_{i \in I} E(S_i)$ ein Cogenerator für Mod-R ist, existiert ein einfacher R-Rechtsmodul S_k ($k \in I$) mit $\text{Hom}_R(E(S_R) | K_R, E(S_k)) \neq \{0\} \Rightarrow \text{Hom}_R(E(S_R), E(S_k)) \neq \{0\}$.

Da R rechtshereditär und $E(S_k)$ unzerlegbar ist, folgt daraus: $E(S_k)$ ist epimorphes Bild von $E(S_R)$. (*)

Die Torsionsklasse $\underline{T}_{S_R}$ ist stabil $\Rightarrow E(S_R) \in \underline{T}_{S_R}$
 $\Rightarrow$ (mit (*)) $E(S_k) \in \underline{T}_{S_R} \Rightarrow S_k \in \underline{T}_{S_R} \Rightarrow$
 $\text{Hom}_R(S_R, S_k) \neq \{0\} \Rightarrow S_R \cong S_k \Rightarrow E(S_R) \cong$
 $E(S_k)$.

ad 2:

Sei $\{0\} \neq N_R \subseteq E(S_R)$ ein Untermodul. Wegen Lemma 6.3 genügt es zu zeigen: $\text{Hom}_R(N_R, E(S_R)|_{N_R}) \neq \{0\}$.

Da $\underline{T}_{S_R}$ stabil ist, existiert ein Homomorphismus $0 \neq \beta: S_R \longrightarrow E(S_R)|_{N_R}$. Da R rechtshereditär ist, existiert ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} S_R & \longrightarrow & N_R \text{ (Inklusion)} \\ \downarrow \beta & \searrow \gamma \neq 0 & \\ E(S_R)|_{N_R} & & \end{array}$$

, was noch zu zeigen war.

Bemerkung:

Stenström (49) charakterisiert in chapter vii, Theorem 4.4 diejenigen rechtsnoetherschen Ringe R über denen alle "beschränkten Gabriel-Topologien" von R stabil sind. Insbesondere folgt (vgl. (49), chapter vii, Proposition 4.5), daß über kommutativen noetherschen Ringen alle hereditären Torsionsklassen für $\text{Mod-}R$ stabil sind. Kommutative noethersche hereditäre Ringe - z.B. die kommutativen Dedekindringe - erfüllen daher die Voraussetzungen von Proposition 6.8.

6.6.3: Ringe, die eine Torsionsklasse $\{0\} \neq \underline{T} \in (\tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{C})$ besitzen mit $\underline{T} \subset \underline{T}'$ für alle $\{0\} \neq \underline{T}' \in (\tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{C})$

6.6.3.1: Rechts-V-Ringe, die bis auf Isomorphie genau einen einfachen R-Rechtsmodul besitzen

R heißt rechts-V-Ring, wenn alle einfachen R -Rechtsmoduln injektiv sind.

Es ist leicht nachzuweisen (vgl. (10), Proposition 7.32 A), daß rechts-V-Ringe spezielle rechts-Nakayama Ringe sind.

Cozzens (vgl. (10), Theorem 7.40) charakterisierte diejenigen Differentialpolynomringe über einem Körper K , die rechts-V-Ringe mit (bis auf Isomorphie) genau einem einfachen R -Rechtsmodul sind.

6.6.3.2:

Mit der Bemerkung im Anschluß an Proposition 6.8 folgt, daß ein kommutativer lokaler noetherscher hereditärer Ring R eine Torsionsklasse $\{\sigma\} \neq \underline{T} \in (\mathcal{T}, \subset)$ besitzt mit $\underline{T} \subset \underline{T}'$ für alle $\{\sigma\} \neq \underline{T}' \in (\mathcal{T}, \subset)$. Darüberhinaus wird $\underline{T}$ von der injektiven Hülle des bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten einfachen R -Moduls S erzeugt.

§ 7: Die Coatome von $(\mathcal{T}, \subset)$

Die Charakterisierungssätze für die Coatome von $(\mathcal{T}, \subset)$ ergeben sich durch Dualisierung von Proposition 6.3 (ii) und Korollar 6.5 (ii).

Wir notieren daher nacheinander:

Proposition 7.1: (Charakterisierung der Coatome
von $(\mathcal{T}, \subset)$)

Folgende (zweiseitigen) R-Ideale und Teilklassen von Mod-R
entsprechen einander eineindeutig:

- (i) Coatome von $(\mathcal{T}, \subset)$
- (ii) Torsionsideale $I \subsetneq R$ mit $R|_I \overset{F}{=} \cap R|_J \overset{F}{=} = \{0\}$
für alle Torsionsideale $I \subsetneq J$.

.

.

Korollar 7.2:

Die Coatome von $(\mathcal{T}, \subset)$ bilden eine kleine Menge.

.

.

Proposition 7.1 liefert ein Kriterium dafür, wann jede
Torsionsklasse $| \text{Mod-R} | \neq \underline{T}' \in (\mathcal{T}, \subset)$ in einer maximalen
Torsionsklasse $\underline{T} \in (\mathcal{T}, \subset)$ enthalten ist.

Wir halten fest, wann Mod-R eine eindeutig bestimmte maxi-
male Torsionsklasse $\underline{T}$ besitzt mit $\underline{T}' \subset \underline{T}$ für alle Torsions-
klassen $| \text{Mod-R} | \neq \underline{T}' \in (\mathcal{T}, \subset)$.

Korollar 7.3:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) Es existiert eine Torsionsklasse $| \text{Mod-R} | \neq \underline{T} \in (\mathcal{T}, \subset)$
mit $\underline{T}' \subset \underline{T}$ für alle $| \text{Mod-R} | \neq \underline{T}' \in (\mathcal{T}, \subset)$.
- (ii) R enthält ein echtes Torsionsideal I, das folgende
Bedingungen erfüllt:
 - (a) $J \subset I$ für alle echten Torsionsideale $J \subset R$.
 - (b) $R|_J \subsetneq_{\overset{F}{=}} R|_I$ für alle Torsionsideale $J \subset I$.

.

.

7.4. Beispiele:

7.4.1: (vgl. (3), Beispiel im Anschluß an Theorem 3.6)

Ein Ring R , der

- (a) ein Torsionsideal I besitzt, so daß $R|_I^T$ eine maximale Torsionsklasse für $\text{Mod-}R$, I jedoch kein maximales Torsionsideal von R ist, und
- (b) ein eindeutig bestimmtes echtes Torsionsideal F besitzt, das jedes echte Torsionsideal J von R enthält, mit $T \not\subset R|_F^T$ für mindestens eine Torsionsklasse $| \text{Mod-}R | \neq T \in (\mathcal{T}, \mathcal{C})$.

R sei der Endomorphismenring eines abzählbar unendlich dimensionalen Vektorraums über einem (kommutativen) Körper K . R besitzt genau ein echtes nicht-triviales Ideal F , das aus allen Endomorphismen von endlichem Rang besteht.

Mit (3) ist F ein "hereditäres Torsionsideal".

Es folgt (vgl. (29), §2), daß F ein Torsionsideal von R ist. Hieraus folgt mit Proposition 7.1, daß $R|_F^T$ eine maximale Torsionsklasse für $\text{Mod-}R$ ist. (*)

Um obige Bedingungen (a) und (b) zu verifizieren, müssen wir noch zeigen, daß $R|_F^T$ ebenfalls eine maximale Torsionsklasse für $\text{Mod-}R$ ist. Dazu genügt es wegen Proposition 7.1 zu zeigen:

$$R|_F^F \cap R|_F^T = \{0\}.$$

Angenommen, $R|_F^F \cap R|_F^T \neq \{0\} \Rightarrow$ (mit (*))

$R|_F^F \subset R|_F^T \Rightarrow \text{Hom}_R(R|_F^F, R) \neq \{0\}$, was, wie man sich leicht klar macht, nicht gilt.

7.4.2: Ringe, über denen alle von $|\text{Mod-}R|$ verschiedenen Torsionsklassen für $\text{Mod-}R$ in Coatomem von $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ enthalten sind

7.4.2.1: Rechts-semiartinische Ringe

R heißt rechts-semiartinischer Ring, wenn alle nicht-trivialen R -Rechtsmoduln einfache Untermoduln enthalten.

Wir erhalten sofort die

Proposition 7.5:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) R ist ein rechts-semiartinischer Ring.
- (ii) Jede von $|\text{Mod-}R|$ verschiedene Torsionsklasse für $\text{Mod-}R$ ist in einem von einem einfachen R -Rechtsmodul erzeugten Coatom von $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ enthalten.

$\frac{\cdot}{\cdot}$

7.4.2.2: Ringe, die die aufsteigende Kettenbedingung für (zweiseitige) Ideale erfüllen

Angenommen, R erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung für (zweiseitige) Ideale, dann ist jede Torsionsklasse $\underline{T} \neq \emptyset$ $|\text{Mod-}R|$ für $\text{Mod-}R$ in einem Coatom von $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ enthalten. Dies folgt leicht aus Proposition 7.1 dieser Arbeit, indem man zu jedem Torsionsideal $I \subsetneq R$ die Menge $\{I \subset K \subsetneq R \mid K \text{ Torsionsideal; } R|_K^{\underline{F}} \subset R|_I^{\underline{F}}\}$ betrachtet (vgl. auch (3) Proposition 3.2).

7.4.3: Ringe, die genau eine Torsionsklasse $\underline{T} \neq \emptyset$ in Mod-R besitzen mit $\underline{T}' \subset \underline{T}$ für alle $\underline{T}' \in (\tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{C})$

7.4.3.1: Rechts-semiartinische Ringe mit (bis auf Isomorphie) genau einem einfachen R-Rechtsmodul
(vgl. (3), Beispiel im Anschluß an Proposition 2.11)

Diese Ringe wurden von Golan (14) in Proposition 12.13 vollständig charakterisiert.

7.4.3.2:

Ringe, für die jedes nicht-triviale R-Rechtsideal ein Progenerator für Mod-R ist, z.B. alle (nicht notwendig kommutativen) (rechts)-Dedekindringe besitzen wegen Korollar 7.3 genau eine maximale Torsionsklasse für Mod-R - die von R coerzeugte -, die alle Torsionsklassen $\underline{T}' \in (\tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{C})$ enthält.

Bemerkung:

Auf die Beschreibung von Ringen R, für die jede Torsionsklasse $\{\sigma\} \subset \underline{T} \subset \text{Mod-R}$ für Mod-R sowohl ein Atom von $(\tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{C})$ enthält als auch in einem Coatom von $(\tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{C})$ enthalten ist, gehen wir im nächsten Paragraphen näher ein.

7.6: Die Zusammenhänge zwischen den Coatomen von $(\tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{C})$ und den Coatomen von $(\tilde{\mathcal{T}}_H, \mathcal{C})$

1. Frage: Existiert zu jedem Coatom $\underline{T} \in (\tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{C})$ ein Coatom $\underline{T}' \in (\tilde{\mathcal{T}}_H, \mathcal{C})$ mit $\underline{T}' \subset \underline{T}$?

Da die Coatome von $(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ einfach coerzeugt sind, ist diese Frage offenbar zu folgender Frage äquivalent: Angenommen, der R -Rechtsmodul M_R coerzeugt ein Coatom von $(\mathcal{J}, \mathcal{C})$. Coerzeugt $E(M_R)$ ein Coatom von $(\mathcal{J}_H, \mathcal{C})$?

Frage 1 ist i.a. negativ zu beantworten.

Wir geben dazu einen kommutativen Ring R mit folgenden Eigenschaften an.

- a) R ist kein Körper.
- b) R ist ein lokaler Integritätsring.
- c) Das maximale Ideal $M \subset R$ ist ein Torsionsideal.

Wir zeigen zunächst, wie R ein Gegenbeispiel zu Frage 1 liefert.

Mit Proposition 7.1 folgt wegen (c) zunächst, daß $R|M$ ein Coatom von $(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ coerzeugt. Angenommen, $E(R|M)$ coerzeugt ein Coatom von $(\mathcal{J}_H, \mathcal{C})$. Wegen (b) ist $E(R|M)$ ein Cogenerator für $\text{Mod-}R \Rightarrow E(R|M)^{\mathbb{T}} = \{0\} \Rightarrow (\mathcal{J}_H, \mathcal{C})$ besteht nur aus zwei Elementen. Mit (14), Proposition 12.13 (vgl. auch Beispiel 7.4.3.1 dieser Arbeit) folgt, daß R semiartinsch, also wegen (b) ein Körper ist. Dies ist ein Widerspruch zu (a).

Wir geben nun einen Ring R mit den Eigenschaften (a) bis (c) an.

Dazu betrachten wir zu einer beliebigen Primzahl p den nicht-archimedisch diskret bewerteten Hensel'schen Zahlkörper $\mathbb{Q}_p$ (vgl. (54), Kapitel 18).

Im nächsten Schritt bilden wir den algebraischen Abschluß $\bar{\mathbb{Q}}_p$ von $\mathbb{Q}_p$. Die Fortsetzung der Bewertung von $\mathbb{Q}_p$ auf $\bar{\mathbb{Q}}_p$ liefert eine nicht-diskrete nicht-archimedische Bewertung

auf $\mathbb{Q}_p$ (vgl. (45), Einleitung zu §4 von chapter II).

$R := \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x| \leq 1\}$ sei der Bewertungsring von $\mathbb{Q}_p$.

Es ist klar, daß R ein kommutativer lokaler Integritätsring, aber kein Körper ist. Wir müssen noch zeigen, daß das maximale Ideal $M = \{x \in R \mid |x| < 1\} \subset R$ ein Torsionsideal ist.

Zunächst gilt: $M^2 = M$. Diese Gleichheit folgt leicht aus der Tatsache, daß für jedes $a \in \mathbb{Q}_p$ das Polynom $x^2 - a = 0$ über $\mathbb{Q}_p$ in Linearfaktoren zerfällt.

Für einen R -Modul L bezeichne $Ra(L)$ sein Jacobson-Radikal (vgl. (49), chapter viii). Angenommen, $\text{Hom}_R(M, {}^R M) \neq \{0\}$
 $\Rightarrow Ra(M) \subsetneq M$. Mit (49), Lemma 1.2, chapter viii folgt:
 $M^2 \subset Ra(M) \subsetneq M$ (q.e.a.)

Bemerkung:

Mit (29), Proposition 2.4.3 folgt, daß ein Integritätsring R genau zwei hereditäre Torsionsideale besitzt, nämlich $\{0\}$ und R .

Da jedes "hereditäre Torsionsideal" ein Torsionsideal ist, folgt mit dem zu Frage 1 beschriebenen Ring R , daß der Verband der Torsionsideale eines Ringes i.a. echt größer ist als der Verband der "hereditären Torsionsideale" des Ringes (vgl. den Hinweis im Anschluß an Bemerkung 6.6.1).

2.Frage: Existiert zu jedem Coatom $\underline{T}' \in (\mathcal{T}_H, \mathcal{C})$ ein Coatom $\underline{T} \in (\mathcal{T}, \mathcal{C})$ mit $\underline{T}' \subset \underline{T}$?

Wir können diese Frage nicht allgemein beantworten.

Die folgenden Beispiele sollen lediglich dazu dienen, die Struktur dieser Frage zu erörtern.

7.6.1:

Es ist klar, daß alle Ringe R , über denen jede Torsionsklasse $\text{Mod-}R \neq \underline{T}' \in (\mathcal{T}, \mathcal{C})$ in einer maximalen Torsionsklasse $\underline{T} \in (\mathcal{T}, \mathcal{C})$ enthalten ist - insbesondere alle unter 7.4.2 aufgeführten Ringe -, eine positive Antwort auf Frage 2 liefern.

7.6.2:

Sei R ein beliebiger (nicht notwendig kommutativer) Integritätsring. Wegen (29), Proposition 2.4.3 ist $\underline{E}(R) \subseteq \underline{T}$ die eindeutig bestimmte maximale hereditäre Torsionsklasse für $\text{Mod-}R$, die alle echten hereditären Torsionsklassen für $\text{Mod-}R$ enthält.

Wir zeigen, daß $\underline{R} \subseteq \underline{T}$ eine maximale Torsionsklasse für $\text{Mod-}R$ ist. Wegen Proposition 7.1 genügt es zu zeigen:

$\underline{R} \cap \underline{R} \subseteq \{0\}$ für alle Torsionsideale $\{0\} \subsetneq I \subset R$.

Angenommen, $\underline{R} \cap \underline{R} \neq \{0\}$ für ein Torsionsideal $\{0\} \subsetneq I \subset R$. Man macht sich leicht klar, daß wir o.E. annehmen können: $\underline{R} \cap \underline{R} \subset \underline{R} \Rightarrow \text{Hom}_R(\underline{R} \cap \underline{R}, \underline{R}) \neq \{0\}$, was für einen Integritätsring nicht gilt.

Wegen $\underline{E}(R) \subseteq \underline{R}$ ist Frage 2 für beliebige (nicht notwendig kommutative) Integritätsringe positiv zu beantworten.

7.6.3:

Angenommen, die maximale hereditäre Torsionsklasse $\underline{T}' \in (\mathcal{T}_H, \subset)$ habe die Form $E(S_R)^{\underline{T}}$ für einen einfachen R-Rechtsmodul S_R .

Wir zeigen, daß $S_R^{\underline{T}}$ eine maximale Torsionsklasse für Mod-R ist.

Sei $S_R^{\underline{T}} \subset L_R^{\underline{T}} \subsetneq |\text{Mod-R}|$ eine o.E. einfach coerzeugte Torsionsklasse für Mod-R. Da $E(S_R)^{\underline{T}}$ ein Coatom von $(\mathcal{T}_H, \subset)$ ist, folgt aus $E(S_R)^{\underline{T}} \subset S_R^{\underline{T}}$:

$$E(S_R)^{\underline{T}} = E(L_R)^{\underline{T}} \Rightarrow \text{Hom}_R(S_R, E(L_R)^{\underline{T}}) \neq \{0\} \Rightarrow \\ S_R \subset L_R \quad (\text{bis auf Isomorphie}) \Rightarrow L_R^{\underline{T}} \subset S_R^{\underline{T}}.$$

Bemerkung:

Beispiel 7.6.2 zeigt, daß der zu Frage 1 beschriebene Ring ebenfalls die Bedingungen (a) und (b) des unter 7.4.1 beschriebenen Ringes erfüllt.

Umgekehrt gilt jedoch nicht (vgl.(3)), daß der unter 7.4.1 beschriebene Ring ein Gegenbeispiel zu Frage 1 liefert.

3. Frage: Angenommen, es existiert eine eindeutig bestimmte Torsionsklasse $|\text{Mod-R}| \neq \underline{T}$ für Mod-R, die jede echte Torsionsklasse für Mod-R enthält, existiert dann eine eindeutig bestimmte hereditäre Torsionsklasse $|\text{Mod-R}| \neq \underline{T}'$ für Mod-R, die jede echte hereditäre Torsionsklasse für Mod-R enthält?

Ein Beweis für die positive Antwort auf Frage 3 ist nahezu

trivial.

Sei $\underline{T}$ eine maximale Torsionsklasse für Mod-R , die die Voraussetzungen von Frage 3 erfüllt. Es gilt:

$\underline{T} = M_R \underline{T}$ für einen R -Rechtsmodul M_R . Sei $|\text{Mod-R}| \neq \underline{T}'$ eine hereditäre Torsionsklasse für $\text{Mod-R} \Rightarrow \underline{T}' \subset M_R \underline{T} \Rightarrow M_R \underline{T} \subset \underline{T}' \Rightarrow E(M_R) \underline{T} \subset \underline{T}' \Rightarrow \underline{T}' \subset E(M_R) \underline{T}$.
 $E(M_R) \underline{T}$ ist daher die eindeutig bestimmte maximale hereditäre Torsionsklasse für Mod-R , die die Bedingungen von Frage 3 erfüllt.

Die 4. Frage, die Umkehrung von Frage 3, ist negativ zu beantworten. Ein Gegenbeispiel liefert - wegen 7.6.2 - der zu Frage 1 beschriebene Ring.

§8: Die Charakterisierung von Ringen durch den Verband $(\mathcal{T}, \subset)$ der Torsionsklassen für Mod-R

Wir haben in den Paragraphen 6 und 7 zwei unterschiedliche Ringtypen kennengelernt, für die jede Torsionsklasse $\{0\} \subsetneq \underline{T} \subsetneq |\text{Mod-R}|$ für Mod-R sowohl ein Atom von $(\mathcal{T}, \subset)$ enthält als auch in einem Coatom von $(\mathcal{T}, \subset)$ enthalten ist, nämlich

1. rechts-semiartinsche rechts-Nakayama Ringe (vgl. die Beispiele 6.6.2.1 und 7.4.2.1) und
2. kommutative hereditäre noethersche Ringe (vgl. die Beispiele 6.6.2.2 und 7.4.2.2).

Wir wollen den ersteren Ringtyp im folgenden näher betrachten:

Der Beweis der folgenden beiden Propositionen ist nahezu trivial.

Proposition 8.1:

Für einen rechts-Nakayama Ring R sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) R ist rechts-semiartinisch.
- (ii) $(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ erfüllt folgende Bedingungen:
 - (a) Jede Torsionsklasse $|\text{Mod-}R| + \underline{T} \in (\mathcal{J}, \mathcal{C})$ ist in einem Coatom von $(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ enthalten.
 - (b) Zu jedem Coatom $\underline{T}_C \in (\mathcal{J}, \mathcal{C})$ existiert ein Atom $\underline{T}_a \in (\mathcal{J}, \mathcal{C})$ mit $\underline{T}_a \not\subseteq \underline{T}_C$.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Diese Implikation folgt unmittelbar aus den Propositionen 6.7 und 7.5 dieser Arbeit.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Wegen Proposition 7.5 genügt es zu zeigen, daß die Coatome von $(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ die Form $S_R \underline{T}$ für einfache R -Rechtsmoduln S_R haben.

Sei $M_R \underline{T}$ ein Coatom von $(\mathcal{J}, \mathcal{C})$. Wegen (b) existiert ein Atom $\underline{T}_a \in (\mathcal{J}, \mathcal{C})$ mit $\underline{T}_a \not\subseteq M_R \underline{T}$. Da R ein rechts-Nakayama Ring ist, folgt: $\underline{T}_a = \underline{T}_{S_R}$ für einen einfachen R -Rechtsmodul $S_R \Rightarrow \text{Hom}_R(S_R, M_R) \neq \{\emptyset\} \Rightarrow S_R \subset M_R$ (bis auf Isomorphie) $\Rightarrow S_R \underline{T} \supset M_R \underline{T} \Rightarrow S_R \underline{T} = M_R \underline{T}$.

•
—
•

Die folgende Proposition notieren wir ohne Beweis:

Proposition 8.2:

Für einen rechts-semiartinschen Ring R sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) R ist ein rechts-Nakayama Ring.
- (ii) $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ erfüllt folgende Bedingungen:
 - (a) Jede Torsionsklasse $\{\sigma\} \neq \underline{\mathbb{T}} \in (\mathcal{T}, \mathcal{C})$ enthält ein Atom von $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$.
 - (b) Zu jedem Atom $\underline{\mathbb{T}}_a \in (\mathcal{T}, \mathcal{C})$ existiert ein Coatom $\underline{\mathbb{T}}_c \in (\mathcal{T}, \mathcal{C})$ mit $\underline{\mathbb{T}}_a \not\subseteq \underline{\mathbb{T}}_c$.

.

.

Die folgende Proposition soll die Propositionen 8.1 und 8.2 verallgemeinern:

Proposition 8.3:

Für einen beliebigen Ring R sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) R ist ein rechts-semiartinscher rechts-Nakayama Ring.
- (ii) $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ erfüllt folgende Bedingungen:
 - (a) Zu jeder Torsionsklasse $\{\sigma\} \subsetneq \underline{\mathbb{T}} \subsetneq \text{Mod-}R$ für $\text{Mod-}R$ existiert ein Atom $\underline{\mathbb{T}}_a \in (\mathcal{T}, \mathcal{C})$ und ein Coatom $\underline{\mathbb{T}}_c \in (\mathcal{T}, \mathcal{C})$ mit $\underline{\mathbb{T}}_a \subset \underline{\mathbb{T}} \subset \underline{\mathbb{T}}_c$.
 - (b) Zu jedem Atom $\underline{\mathbb{T}}_a \in (\mathcal{T}, \mathcal{C})$ existiert ein Coatom $\underline{\mathbb{T}}_c \in (\mathcal{T}, \mathcal{C})$ mit $\underline{\mathbb{T}}_a \not\subseteq \underline{\mathbb{T}}_c$.
 - (c) Zu jedem Coatom $\underline{\mathbb{T}}_c \in (\mathcal{T}, \mathcal{C})$ existiert ein Atom $\underline{\mathbb{T}}_a \in (\mathcal{T}, \mathcal{C})$ mit $\underline{\mathbb{T}}_a \not\subseteq \underline{\mathbb{T}}_c$.
- (iii) $(\mathcal{T}_H, \mathcal{C})$ erfüllt folgende Bedingung:
 - (d) Zu jedem Atom $\underline{\mathbb{T}}'_a \in (\mathcal{T}_H, \mathcal{C})$ existiert ein Coatom $\underline{\mathbb{T}}'_c \in (\mathcal{T}_H, \mathcal{C})$ mit $\underline{\mathbb{T}}'_a \not\subseteq \underline{\mathbb{T}}'_c$.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Die Bedingungen (a) bis (c) von (ii) verifiziert man sofort mit Hilfe der Propositionen 6.7 und 7.5 dieser Arbeit.

Bedingung (d) von (ii) sieht man leicht ein, wenn man sich klarmacht, daß über einem rechts-semiartinischen Ring R die Coatome von $(\mathfrak{J}_H, \mathfrak{C})$ die Form $E(S_R)_{\mathbb{T}}$ für einfache R -Rechtsmoduln S_R haben.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Sei $\{S_i\}_{i \in I}$ die Familie der nicht-isomorphen einfachen R -Rechtsmoduln. Wir müssen zeigen, daß die Atome von $(\mathfrak{J}, \mathfrak{C})$ die Form $\mathbb{T}_{S_i}$ für ein $i \in I$ haben, während die Coatome von $(\mathfrak{J}, \mathfrak{C})$ die Form $S_k_{\mathbb{T}}$ für ein $k \in I$ haben. Die Propositionen 6.7 und 7.5 liefern dann die gewünschte Behauptung.

1. Es existiert eine Familie $\{M_h\}_{h \in H}$ von R -Rechtsmoduln, so daß für jedes $h \in H$ $\mathbb{T}_{M_h}$ ein Atom und $M_h_{\mathbb{T}}$ ein Coatom von $(\mathfrak{J}, \mathfrak{C})$ ist. Darüberhinaus haben alle Atome und Coatome von $(\mathfrak{J}, \mathfrak{C})$ die Form $\mathbb{T}_{M_1}$ bzw.

$M_1_{\mathbb{T}}$ für ein $1 \in H$.

Sei dazu $\mathbb{T}_{L_R}$ ein Atom von $(\mathfrak{J}, \mathfrak{C})$. Wegen (b) existiert ein Coatom $K_R_{\mathbb{T}} \in (\mathfrak{J}, \mathfrak{C})$ mit $\mathbb{T}_{L_R} \not\subseteq K_R_{\mathbb{T}} \Rightarrow \text{Hom}_R(L_R, K_R) \neq \{0\}$. Sei $\sigma \neq \varphi \in \text{Hom}_R(L_R, K_R)$. Wir setzen $M_h := \text{Im } \varphi$. Es folgt: $\mathbb{T}_{M_h} \subset \mathbb{T}_{L_R}$ und $M_h_{\mathbb{T}} \supset K_R_{\mathbb{T}} \Rightarrow \mathbb{T}_{M_h} = \mathbb{T}_{L_R}$ und $M_h_{\mathbb{T}} = K_R_{\mathbb{T}}$.

Wegen Bedingung (c) ist Behauptung (1) damit bewiesen.

2. Sei S_R ein einfacher R -Rechtsmodul; dann ist

$E(S_R)_{\mathbb{T}}$ ein Coatom von $(\mathfrak{J}_H, \mathfrak{C})$.

Wegen (d) existiert zu $\mathbb{T}_{S_R}$ ein Coatom $E(N_R)_{\mathbb{T}} \in (\mathfrak{J}_H, \mathfrak{C})$ mit $\mathbb{T}_{S_R} \not\subseteq E(N_R)_{\mathbb{T}} \Rightarrow \text{Hom}_R(S_R, E(N_R)) \neq \{0\} \Rightarrow$

$E(S_R) \subset E(N_R)$ (bis auf Isomorphie) $\Rightarrow E(S_R)_{\mathbb{T}} \supset E(N_R)_{\mathbb{T}}$;

d.h. $E(S_R)_{\mathbb{T}} = E(N_R)_{\mathbb{T}}$.

3. Sei $\mathbb{T}_{M_h}$ ein Atom bzw. $M_h \mathbb{T}$ ein Coatom von $(\mathcal{Y}, \mathcal{C})$, dann

existiert ein einfacher R -Rechtsmodul S_R mit $\mathbb{T}_{M_h} =$

$$\mathbb{T}_{S_R} \text{ und } M_h \mathbb{T} = S_R \mathbb{T}.$$

Da $\prod_{i \in I} E(S_i)$ ein Cogenerator für $\text{Mod-}R$ ist, existiert zu

M_h ein einfacher R -Rechtsmodul S_i ($i \in I$) mit

$$\text{Hom}_R(M_h, E(S_i)) \neq \{0\}.$$

Wir zeigen: $E(S_i) \leq_{\mathbb{T}} M_h$ (*)

Dazu müssen wir zeigen: $\text{Hom}_R(N_R, E(S_i)) \neq \{0\}$ für alle nicht-trivialen Untermoduln $N_R \subset M_h$ (vgl. hierzu die unter 2.7.2 aufgeführten Beziehungen)

Sei $N_R \subset M_h$ ein nicht-trivialer Untermodul. Da $M_h \mathbb{T}$ ein Coatom von $(\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ ist, gilt: $N_R \sim_{\mathbb{T}} M_h \Rightarrow$

$\text{Hom}_R(M_h, N_R) \neq \{0\}$. Sei $L_R = \text{Im } \downarrow$ für ein $\sigma \neq \downarrow \in$

$\text{Hom}_R(M_h, N_R)$. Da $\mathbb{T}_{M_h}$ ein Atom von $(\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ ist, folgt:

$$M_h \sim_{\mathbb{T}} L_R \Rightarrow \text{Hom}_R(L_R, E(S_i)) \neq \{0\}.$$

Wir betrachten das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} L_R & \xrightarrow{\quad} & N_R \text{ (Inklusion)} \\ \downarrow & \swarrow & \\ E(S_i) & & \end{array}$$

Es folgt: $\text{Hom}_R(N_R, E(S_i)) \neq \{0\}$.

Behauptung (*) ist damit bewiesen.

Mit (*) folgt: $E(S_i) \leq_{\mathbb{T}} E(M_h)$

Wegen (2) ist $E(S_i)_{\mathbb{T}}$ ein Coatom von $(\mathcal{Y}_H, \mathcal{C}) \Rightarrow$

$$E(S_i) \sim_{\mathbb{T}} E(M_h) \Rightarrow \text{Hom}_R(S_i, E(M_h)) \neq \{0\} \Rightarrow S_i \subset M_h$$

(bis auf Isomorphie) $\Rightarrow S_i \mathbb{T} \supset M_h \mathbb{T}$; d.h. $S_i \mathbb{T} = M_h \mathbb{T}$

$$\Rightarrow \text{Hom}_R(M_h, S_i) \neq \{0\} \Rightarrow \mathbb{T}_{S_i} \subset \mathbb{T}_{M_h}; \text{ d.h.}$$

$$\mathbb{T}_{S_i} = \mathbb{T}_{M_h}, \text{ womit auch (3) bewiesen ist.}$$

Aussage (i) folgt nun aus (1) und (3).

Bemerkung:

Ich vermute, daß sich Proposition 8.3 auch ohne Bedingung (d) beweisen läßt.

Teply und Bronowitz (52) nennen eine Torsionstheorie $(\underline{T}, \underline{F})$ für $\text{Mod-}R$ von einfachem Typ, wenn sie von einer Menge einfacher R -Rechtsmoduln erzeugt wird.

Sie charakterisieren in ihrer Arbeit ((52), Theorem 1) diejenigen Ringe R , über denen alle Torsionstheorien für $\text{Mod-}R$ von einfachem Typ sind.

Wir wollen versuchen, innerhalb unserer Theorie diejenigen Ringe R zu charakterisieren, über denen alle Torsionstheorien für $\text{Mod-}R$ hereditär sind. Als Korollar erhalten wir dann eine mögliche Charakterisierung derjenigen Ringe R , über denen alle Torsionstheorien für $\text{Mod-}R$ von einfachem Typ sind.

Proposition 8.4:

Für einen beliebigen Ring R sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Alle Torsionstheorien für $\text{Mod-}R$ sind hereditär.
- (ii) Zu jedem R -Rechtsideal $I_R \subsetneq R$ existiert ein R -Rechts- K_R mit ${}^R I_R \leqslant_F E({}^R K_R)$ und $\text{Hom}_R({}^R I_R, E({}^R K_R)) \neq \{0\}$.
- (iii) Zu jeder Torsionsklasse $|\text{Mod-}R| \neq \underline{T} \in (\mathcal{T}, \mathcal{C})$ existiert eine Torsionsklasse $\underline{T}' \in (\mathcal{T}_H, \mathcal{C})$ mit $\underline{T} \subset \underline{T}'$ und $(\underline{T} \cap \underline{T}')^{\underline{T}} \neq \underline{T}'$.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (iii) - trivial -

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

Sei $I_R \subsetneq R$ ein R -Rechtsideal. Wir betrachten die Torsionsklasse $R|_{I_R} \stackrel{T}{=} \in (\mathcal{T}, \mathcal{C})$. Wegen (iii) existiert eine Torsionsklasse $E(N_R) \stackrel{T}{=} \in (\mathcal{T}_H, \mathcal{C})$ mit $R|_{I_R} \stackrel{T}{=} \subset E(N_R) \stackrel{T}{=}$; d.h.

$R|_{I_R} \leqslant_{\mathbb{F}} E(N_R)$ und $(R|_{I_R} \cap E(N_R) \stackrel{T}{=}) \stackrel{T}{=} \neq \stackrel{T}{=} \Rightarrow R|_{I_R} \not\subset E(N_R) \stackrel{T}{=}$

$\Rightarrow \text{Hom}_R(R|_{I_R}, E(N_R)) \neq \{0\}$. Da Bilder zyklischer R -Rechtsmoduln zyklisch sind, folgt (ii) jetzt unmittelbar.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Es genügt zu zeigen, daß für alle R -Rechtsmoduln M_R und alle zyklischen Untermoduln $xR \subset M_R$ stets $xR \leqslant_{\mathbb{F}} M_R$ gilt (vgl. hierzu auch den Beweis von Proposition 5.4 dieser Arbeit).

Sei daher $xR \subset M_R$ ein o.E. nicht-trivialer zyklischer Untermodul von M_R . Wir müssen zeigen: $\text{Hom}_R(M_R, xR|_{N_R}) \neq \{0\}$ für alle Untermoduln $N_R \subsetneq xR$ (vgl. hierzu Bedingung (2) von Abschnitt 2.7 dieser Arbeit).

Wegen (ii) existiert ein zyklischer R -Rechtsmodul yR mit $xR|_{N_R} \leqslant_{\mathbb{F}} E(yR)$ und $\text{Hom}_R(xR|_{N_R}, E(yR)) \neq \{0\}$.

Wir betrachten das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 xR & \xrightarrow{\quad} & M_R \text{ (Inklusion)} \\
 \downarrow & & \nearrow \varphi \\
 xR|_{N_R} & & \\
 \downarrow & & \\
 E(yR) & &
 \end{array}$$

$\varphi(M_R)$ ist ein nicht-trivialer Untermodul von $E(yR)$.

Mit Bedingung (2) von Abschnitt 2.7 dieser Arbeit folgt aus $x^R|_{N_R} \leq_{\mathbb{F}} E(yR): \text{Hom}_R(\mathcal{I}(M_R), x^R|_{N_R}) \neq \{\emptyset\}$.

Aussage (i) ist damit bewiesen.

.
—
.

Korollar 8.5:

Für einen beliebigen Ring R sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Alle Torsionstheorien für Mod-R sind von einfachem Typ.
- (ii) R ist ein rechts-semiartinscher Ring mit $S_R \sim_{\mathbb{F}} E(S_R)$ für alle einfachen R-Rechtsmoduln S_R .
- (iii) R ist ein rechts-semiartinscher Ring, dessen Coatome von $(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ mit den Coatomen von $(\mathcal{I}_H, \mathcal{C})$ zusammenfallen.
- (iv) $(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ ist zum Potenzmengenverband einer Menge M isomorph und $(\mathcal{I}_H, \mathcal{C})$ erfüllt Bedingung (d) von Proposition 8.3.

.
—
.

Mit Hilfe von (52), Theorem 3 erhalten wir schließlich:

Korollar 8.6:

Für einen kommutativen Ring R sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) R ist ein perfekter Ring (R ist die direkte Summe lokaler Ringe mit T-nilpotenten maximalen Idealen)
(vgl. (49), §5, example 1, chapter viii).
- (ii) $(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ enthält nur endlich viele Atome oder Coatome. Darüberhinaus erfüllt $(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ die Bedingungen (a) bis

- (c) und $(\mathcal{T}_H, \subset)$ Bedingung (d) von Proposition 8.3.
 (iii) $(\mathcal{T}, \subset)$ ist zum Potenzmengenverband einer endlichen Menge M isomorph und $(\mathcal{T}_H, \subset)$ erfüllt Bedingung (d) von Proposition 8.3.

÷
—
÷

Bemerkung:

Wir wollen noch einmal auf Problem 5.6.1 dieser Arbeit zurückkommen:

Seien R die direkte Summe von Matrizenringen über lokalen links- und rechtsperfekten Ringen und S ein beliebiger Ring, dessen Verband $(\mathcal{T}', \subset)$ von Torsionsklassen für Mod-S zum entsprechenden Verband $(\mathcal{T}, \subset)$ von Torsionsklassen für Mod-R isomorph ist.

Angenommen, die in Theorem 5.2 beschriebenen Abbildungen $f, g: |\text{Mod-R}| \longrightarrow |\text{Mod-S}|$ ließen sich durch eine Abbildung $F: |\text{Mod-R}| \longrightarrow |\text{Mod-S}|$ ersetzen. Mit Theorem 5.2(ii) würde folgen, daß die TTF-Klassen für Mod-R (Definition siehe (49), chapter vi, §8) eineindeutig den TTF-Klassen für Mod-S entsprechen. Mit Hilfe von (52), Theorem 3 erhielte man daher, daß auch S die direkte Summe von Matrizenringen über lokalen links- und rechtsperfekten Ringen ist.

Jeder Potenzmengenverband einer endlichen Menge wird durch den Verband der Torsionsklassen für einen halbeinfach (artinschen) Ring realisiert.

Wir könnten also beweisen:

Ein Ring R ist genau dann die direkte Summe von Matrizenringen über lokalen links- und rechtsperfekten Ringen, wenn der Verband $(\mathcal{T}, \subset)$ der Torsionsklassen für Mod-R zum Potenzmengenverband einer endlichen Menge M isomorph ist.

Wegen Korollar 8.5(iv) ist Problem 5.6.1 dieser Arbeit bereits dann für Modulkategorien negativ zu beantworten, wenn es einen Ring R mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. R ist nicht die direkte Summe von Matrizenringen über lokalen links- und rechtsperfekten Ringen.
2. Alle Torsionstheorien für $\text{Mod-}R$ sind von einfachem Typ.
3. Der Verband der Torsionsklassen für $\text{Mod-}R$ ist endlich.

Literatur:

1. Adelmann, M. : "Abelian categories over additive ones", J.pure and applied algebra 3 (1973), 103-117.
2. Barr, M.: " Non-abelian torsion theories", Can. J. Math. 25,2 (1973), 1224-1237
3. Beachy, J.A.: "On maximal torsion radicals", Can. J. Math. 25,2 (1973), 712-726
4. Beachy, J.A.: "On maximal torsion radicals II", Can. J. Math. 27,1 (1975), 115-120
5. Bican, Kepka, Neměc: "Torsion theories and homological dimensions, J. Algebra 35 (1975), 99-122
6. Bourbaki, N.: "Elements of mathematics: Commutative algebra", Paris-Reading: Hermann and Addison-Wesley (1972)
7. Dickson, S.E.: "A torsion theory for abelian categories", Trans. Amer. Math. Soc. 21 (1966), 223-235
8. Freyd, P.: "Abelian categories", Harper & Row, New York (1964)

9. Freyd, P.: "Representations in abelian categories", Proc. Conf. on cat. algebra, La Jolla 1965, Springer: Berlin (1966)
10. Faith, C.: "Algebra: rings, modules and categories", Vol. I, Grundlehren Math. Wiss. Vol. 190, Springer: Berlin-Heidelberg-New York (1973)
11. Gabriel, P.: "Des catégories abéliennes", Bull. Soc. Math. France 90, (1962), 323-448
12. Gardner, : "Some aspects of T-nilpotence II lifting properties over T-nilpotent ideals", Pacific J. Math. (1975), 445-459
13. Golan, J.S.: "Topologies on the torsion theoretic spectrum of a noncommutative ring", Pacific J. Math. 51 (1974), 439-450
14. Golan, J.S.: "Localization of noncommutative rings", M. Dekker Inc., New York (1975)
15. Golan, J.S.: "Some functors arising from the consideration of torsion theories over noncommutative rings", Bull. Austr. Math. Soc. 15 (1976), 455-460

16. Goldie, A.W.: "Torsion-free modules and rings",
J. Algebra 1 (1964), 268-287
17. Goldie, A.W.: "Localization in noncommutative
noetherian rings", J. Algebra 5
(1967), 89-105
18. Goldie, A.W.: "A note on noncommutative lo-
calization", J. Algebra 8
(1968), 41-44
19. Goldman, O.: "Rings and modules of quotients",
J. Algebra 13 (1969), 10-47
20. Herden, G.: "Einfach erzeugte und einfach
coerzeugte Torsionstheorien
für Modulkategorien",
Diplomarbeit in Mathematik,
Bochum (1975)
21. Jans, J.P.: "Some aspects of torsion",
Pacific J. Math. 15 (1965),
2149-1259
22. Jans, J.P.: "Torsion associated with duali-
ty", Tôhoku Math. J. 24 (1972),
449-452
23. Johnson, R.E.: "The extended centralizer of a
ring over a module", Proc.
Amer. Math. Soc. 2 (1951),
891-895
24. Kaplansky, I.: "Projective modules", Ann. Math.
68 (1958), 372-377

- 25. Kato, T.: "Torsionless modules", Tôhoku Math. J. 20 (1968), 234-243
- 26. Kato, T.: "Rings of U-dominant dimension ≥ 1 ", Tôhoku Math. J. 21 (1969), 321-327
- 27. Kato, T.: "Dominant modules", J. Algebra 14 (1970), 341-349
- 28. Lambek, J.: "On Utumi's ring of quotients", Can. J. Math. 15 (1963), 363-370
- 29. Lambek, J.: "Torsion theories, additive semantics and rings of quotients", Lecture Notes in Math. Vol. 177, Springer: Berlin-Heidelberg-New York (1971)
- 30. Lambek, J.: "Noncommutative localization", Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 857-872
- 31. Louden, : "Torsion theories and ring extension", Communications in Algebra 4 (1976), 503-532
- 32. Mac Lane, S.: "Categories for the working mathematician", Graduate Texts in Math. Vol.5, Springer: Berlin-Heidelberg-New York (1971)
- 33. Maranda, J.M.: "Injective structures", Trans. Amer. Math. Soc. 110 (1964), 98-135

- 34. Miller, : "Finetely generated projective modules and TTF-classes", Pacific J. Math. 64 (1976), 505-515
- 35. Mitchell, B.: "The full embedding theorem" , Amer. J. Math. 86 (1964), 619-637
- 36. Mitchell, B.: "Theory of categories", New York: Academic Press (1965)
- 37. Morita, K.: "Localization in categories of modules I", Math. Z. 114 (1970), 121-144
- 38. Morita, K.: "Localization in categories of modules II", J. Reine, angew. Math. 242 (1970), 163-169
- 39. Popescu, N.: "Abelian categories with applications to rings and modules", London-New York: Academic Press (1973)
- 40. Preuß, G.: "Trennung und Zusammenhang", Monatsh. Math. 74 (1970), 70-87
- 41. Preuß, G.: "E-zusammenhängende Räume", Manuscripta Math. 3 (1970), 331-342
- 42. Preuß, G.: "Eine Galois-Korrespondenz in der Topologie", Monatsh. Math. 75 (1971), 447-452
- 43. Preuß, G.: "Allgemeine Topologie", Springer Hochschultext: Berlin-Heidelberg-New York (1975)

44. Raynaud, : "Localisation et topologie de Stone",
in: Golan, J.S.: "Some functors
arising from the consideration of
torsion theories over noncommutative
rings", Bull. Austr. Math. Soc. 15
(1976), 457
45. Robert, A.: "Elliptic curves", Lecture Notes in
Math. Vol. 326, Springer: Berlin-
Heidelberg-New York (1973)
46. Schrader, P.: "Kategorientheoretische Verallgemeinerung
von topologischen und meßbaren Räumen",
Diplomarbeit in Mathematik, Bochum
(1978)
47. Senkbeil, K.W.: "TTF-Klassen und zerfallende Torsions-
theorien", Diplomarbeit in Mathe-
matik, Bochum (1976)
48. Stenström, B.: "Rings and modules of quotients",
Lecture Notes in Math. Vol. 237,
Springer: Berlin-Heidelberg-New York
(1971)
49. Stenström, B.: "Rings of quotients", Grundlehren der
Math. Wiss. Vol. 217, Springer:
Berlin-Heidelberg-New York (1975)
50. Storrer, H.H.: "Torsion theories and dominant dimensions",
appendix to J. Lambek (29)
51. Tachikawa, H.: "Quasi-Frobenius rings and generali-
zations", Lecture Notes in Math. Vol.

351, Springer: Berlin-Heidelberg-
New York (1973)

52. Teply, M.L./ : "Torsion theories of simple type",
Bronowitz, R. J. of pure and applied algebra 3
(1973), 329-336
53. Utumi, Y. "On quotient rings", Osaka J. Math. 8,
(1956), 1-18
54. van der Waerden: " Algebra, zweiter Teil", Heidelberger
Taschenbücher, Springer: Berlin-
Heidelberg-New York (1967)
55. Walker, C.L./ : "Quotient categories of modules",
Walker, E.A. Proc. Conf. on cat. algebra, La Jolla
1965, Springer: Berlin (1966)
56. Walker, C.L./ : "Quotient categories and rings of
Walker, E.A. quotients", Rocky-Mountain J. Math. 2
(1972), 513-555

Kurzer Lebenslauf:

am 17.2.1949 in Haltern (Westfalen) geboren,
Besuch der Volksschule in Münster von 1955 bis 1960,
danach in Münster Schüler der Realschule und einer einjährigen
Höheren Handelsschule,
vom April 1967 an bis Ostern 1970 Besuch des Wirtschaftsgym-
nasiums in Hamburg,
Erlangung der allgemeinen Hochschulreife durch eine Ergänzungs-
prüfung in Kiel im Herbst 1970,
seit dem Wintersemester 1970/71 Studium der Mathematik mit dem
Nebenfach Wirtschaftswissenschaften in Bochum,
Diplomhauptprüfung in Mathematik im Sommer 1975,
ab Oktober 1975 Arbeit an einer Dissertation,
nebenbei Tätigkeit als Mathematiklehrer und wissenschaftliche
Hilfskraft,
verheiratet seit dem 9.12.1977

Bochum, den 14.12.1978

Gerhard Kuder

